خورشیدوند
دانشکده فنی پسران
دورود

فیزیک مکانیک

کمیت های فیزیکی

کمیت : به تمامی پدیده های قابل اندازه گیری موجود در طبیعت کمیت گفته می شود.

تعریف یکا: معیار و مقیاس ومبنایی است که اندازه‌گیری هرکمیت براساس آن صورت می‌گیرد.

شرایط انتخاب یکا را بنویسید : الف: دسترسی پذیر باشد ب: دقت کافی داشته باشد

ج: تغییر ناپذیر و ثابت باشد

اندازه گیری چیست؟ مقایسه هر کمیت با یکای آن تا مشخص شود که آن کمیت چند برابر یکاست را اندازه گیری می گوئیم.

کمیت های اصلی را تعریف کنید؟ کمیت هایی که برای آنها یکا تعریف شده است را کمیت اصلی گویند و به یکای آن یکای اصلی می گویند.

کمیت	نماد کمیت	یکا و نماد آن	یکاهای جانبی پر کاربرد
طول	x, h, L	m متر	mm, cm
جرم	M,m	Kg کیلوگرم	g
زمان	t	s ثانیه	Min,h
شدت جریان الکتریکی	I	A آمپر	////////
دمای مطلق	T	K کلوین	^{0}C, ^{0}F
مقدار ماده	n	Mol مول	//////////
شدت روشنایی	I	Cd کاندلا (شمع)	/ / / / / / / /

«جدول کمیات و یکای اصلی»

کمیت های فرعی : کمیتهایی که یکای آنها بر اساس یکای کمیت اصلی و یک رابطهٔ فیزیکی یا ریاضی بدست می آید را کمیات فرعی و یکای آنها یکای فرعی است.

سؤال: چند کمیت فرعی را مثال زده و یکای آنها را بدست آورید.

الف) **مساحت :** به عنوان مثال مساحت مربع برابر یک ضلع ضربدر خودش است لذا یکای آن متر ضربدر متر یعنی متر مربع است.

ب)**چگالی :** با توجه به رابطه $\rho \Rightarrow \frac{M}{v}$ و اینکه یکای جرم Kg و یکای فرعی حجم که متر مکعب است پس یکای چگالی کیلوگرم بر متر مکعب است.

اکنون به تعریف برخی از یکاهای اصلی می پردازیم :

۱. تعریف های طول:

الف: به فاصله $\frac{1}{10000000}$ استوا تا قطب شمال در نصف النهار که از شهرپاریس می گذرد را یک متر می گویند.

ب: مضربی از طول موج نارنجی قرمز اتم خاصی از ایزوتوپ کریپتون را به عنوان یک متر تعریف کرده اند.

در یک ثانیه مسافتی که نور می پیماید برابر با ۲۹۹۷۹۲۴۵۸یا ۳۴۱۰۸ است لذا به عنوان جدیدترین تعریف یکای متری می توان گفت :

جدیدترین و آخرین تعریف : به مسافتی که نور در زمان $\frac{1}{3 \times 10^{8}}s$ می پیماید را یک متر می گویند.

نکته : یک متر را بصورت نمونه در میله ای به جنس پلاتین ایریدیوم که بر روی آن توسط طلا دو علامت مشخص شده انتخاب کرده اند و فاصله این دو علامت در دمای صفر درجه سیلیوس برابر یک متر است.

۲- تعریف های زمان:

تعریف اولین یکای زمان : به فاصله زمانی یک $\frac{1}{86400}$ شبانه روز یک ثانیه گفته می شود.

آخرین تعریف جدیدترین تعریف : به مدت زمان مشخص از تعداد نوسانات

$\frac{\text{عدد}}{9192631770}$ از اتم سزیم را یک ثانیه می گویند.

۳. تعریف جرم :

مقدار جرمی که یک لیتر $1000\ cm^3$ آب خالص در دمای ۴ درجه سیلسیوس دارد یک کیلوگرم گویند.

پیشوندهای یکاها : برخی از اعداد یکاها چون دهها برابر کوچکتر یا بزرگتر از یک هستند لذا باید توسط پیشوندهایی که در پشت یکا نوشته می شود مشخص می گردند تا هم خواندن و هم نوشتن آنها ساده شود.

پیشوندهای SI

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
10^{24}	یوتا	Y	10^{-24}	یوکتو	y
10^{21}	زِتا	Z	10^{-21}	زِپتو	z
10^{18}	اِگزا	E	10^{-18}	آتو	a
10^{15}	پِتا	P	10^{-15}	فِمتو	f
10^{12}	ترا *	T	10^{-12}	پیکو *	p
10^{9}	گیگا (جیگا) *	G	10^{-9}	نانو *	n
10^{6}	مِگا *	M	10^{-6}	میکرو *	μ
10^{3}	کیلو *	k	10^{-3}	میلی *	m
10^{2}	هکتو *	h	10^{-2}	سانتی *	c
10^{1}	دِکا *	da	10^{-1}	دِسی *	d

ستاره دار (*) موارد پرکاربرد که بهتر است به خاطر بسپارید

کمیتهای نرده ای : کمیت هایی که تنها با داشتن مقدار و بزرگی آنها می توان آنها را مشخص کرد را کمیات نرده ای یا اسکالر گویند مثل جرم، زمان، دما، چگالی، انرژی، فشار

تعریف کمیت های برداری : کمیتهایی که علاوه بر مقدار و بزرگی دارای جهت می باشند و از قاعده جمع برداری پیروی می کنند را کمیات برداری می گویند.

مثل : جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو

جابجایی : پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند.

نکته : هر بردار را با یک علامت و حرف انگلیسی نشان می دهند که در بالای آن پیکان داردواگر بزرگی آن مورد نظر باشد علامت را بدون پیکان بکار برده و یا آن را بین دو خط شبیه قدر مطلق قرار می دهیم. $|\vec{a}|$ یا a

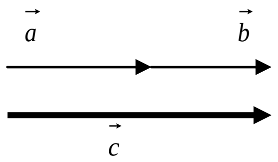
تعریف بردار برآیند: برداری است که برابر با حاصل جمع برداری دو یا چند بردار باشد را بردار برآیند گویند.

سؤال : چگونه می توان دو یا چند بردار را با هم جمع کرد؟

برای رسم بردار برآیند تک تک بردارها را در امتداد راستا یا انتهای یکدیگر با توجه به جهت و بزرگیشان رسم می کنیم و آنگاه برداری بردار برآیند است که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل می کند.

روش محاسبه بزرگی جمع بردار :

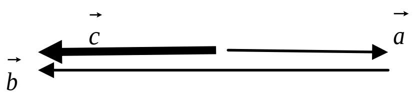
الف) اگر دو بردار هم جهت باشند بزرگی بردار برآیند آنها برابر با مجموع جبری بزرگی تک تک بردارها است.



هم جهت $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$

$c = a + b$

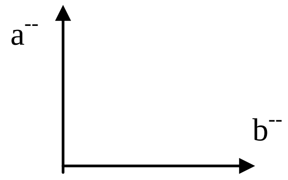
ب) اگر دو برداری خلاف جهت یکدیگر باشند بزرگی بردار برآیند برابر است با قدر مطلق اختلاف بزرگی دو بردار



برداری $\vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$

خلاف جهت هم بزرگی $c = |b - a|$

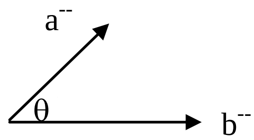
اگر دو بردار بر یکدیگر عمود باشند در این صورت بزرگی بردار برآیند از قضیه فیثاغورت بدست می آید.

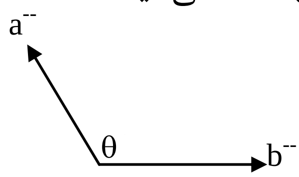


$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ج

اگر دو بردار با یکدیگر هر زاویه دلخواهی بسازد در این صورت بزرگی بردار برآیند از قاعدهٔ کسینوسها بدست می آید.

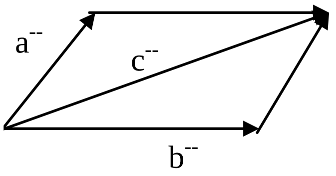




$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abcos\theta}$$

سؤال : نشان دهید و اثبات کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با یکدیگر زاویه θ بسازند در این صورت بردار برآیندآنهایعنیc از رابطهٔ $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abcos\theta}$ بدست می آید؟

در مثلث MNP وQNP داریم $y = a \sin \theta$ و $x = a \cos A$ و $C^2 = y^2 + (b + x)^2$



برداری $c = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$

بزرگی $c = \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}$

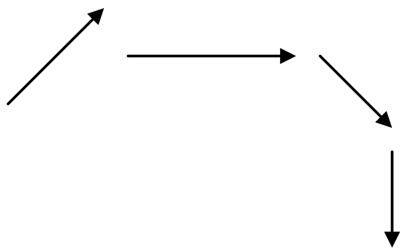
$$c^2 = y^2 + (b + x)^2 \Rightarrow c^2 = (a \sin \theta)^2 + (b + a \cos \theta)^2$$

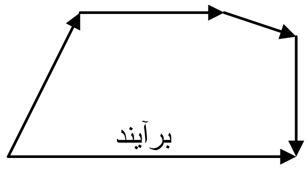
$$c^2 = a^2 \sin \theta + \left(b^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta\right) \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2\left(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta\right) + b^2 + 2ab \cos \theta \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \Rightarrow$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2abcos\theta}$$

اگر چهار برداری $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ بصورت روبرو می باشد در این صورت بردار برآیند را بدست آورید؟





چهار برداری $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ به صورت روبرو می باشد در این صورت بزرگی و حاصل برداری عبارت های خواسته شده را بدست آورید؟ $\vec{a} = 2i + 3\vec{j}$ و $\vec{b} = 2i + 2\vec{j}$ و $\vec{c} = 4i + 5\vec{j}$ و $\vec{d} = 6i + 7\vec{j}$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ ب) $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$ ج) $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 2i + 3\vec{j} + 2i + 2\vec{J} + 4i - 5\vec{j} - 6i + 7\vec{j}$

$\vec{e} = 2i + 7\vec{j}$ بزرگی $= \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53} = \sqrt{53}$ e

ب) $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = (2i + 3\vec{j} + 2i + 2\vec{j}) - (4i - 5\vec{j} - 6i - 7\vec{j})$

$(4i + 5\vec{j}) - (-2i + 2\vec{j}) \Rightarrow f = 6i + 3j =$ برداری

بزرگی$= \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

ج) $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{g} = 2i + 3\vec{j} - 2i - 2\vec{j} - 4i - 5\vec{j} + 6i - 7\vec{j}$

$g = 2i + 3j - 2i - 2j - 4i + 5j + 6i - 7j = 2i - j \Rightarrow g = 2i - g$

بزرگی$= g = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

ضرب نرده ای یا(داخلی) : نوعی ضرب بین دو بردار است که نتیجه آن یک نرده ای است و بصورت زیر است :

$\vec{a}.\vec{b} = c = ab\cos\theta$

کار: مثال $w = Fd\cos\theta$

ضرب برداری (خارجی) : نوعی ضرب بین دو بردار است که نتیجه آن یک بردار است و بصورت زیر است :

$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b} \Rightarrow |d| = ab\sin\theta$

$\vec{c} = \vec{b}\times\vec{a} \Rightarrow ba\sin\theta = |\vec{c}|$

در دستگاه مختصات کارتزین نشان دهید.

$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$

بردار یکه : برداری است که دارای بزرگی یک یا واحد است ضمناً هر بردار با خودش زاویه صفر می سازد و هر کدام با دیگری زاویه ۹۰ درجه می سازد.

$\vec{i}.\vec{i} = |\vec{i}|\times|\vec{i}|\cos 0 = 1\times1\times1 = 1$

$\vec{j}.\vec{j} = |\vec{j}|\times|\vec{j}|\cos 0 = 1\times1\times1 = 1$

$\vec{k}.\vec{k} = |\vec{k}|\times|\vec{k}|\cos 0 = 1\times1\times1 = 1$

$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}|\times|\vec{j}|\cos 90 = 1\times1\times0 = 0$

$\vec{i}.\vec{k} = |\vec{i}|\times|\vec{k}|\cos 90 = 1\times1\times0 = 0$

$\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90 = 1\times1\times0 = 0 \Rightarrow \vec{j}.\vec{j} = 0$

$\vec{i}.\vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}|\cos 90 = 1\times1\times0 \Longrightarrow \vec{i}.\vec{k} = 0$

$\vec{j}.\vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\cos 90 = 1\times1\times0 = 0 \Rightarrow \vec{j}.\vec{k} = 0$

سوال : با استفاده از ضرب نرده ای بردارها نشان دهید :

الف) $\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

ب) زاویه بین دو بردار از رابطه روبرو به دست می آید :

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

که $b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}, a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

جواب الف) :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right).\left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right)$$

$$\vec{a} \quad a_x b_x\left(\vec{i}.\vec{i}\right) + a_x b_y\left(\vec{i}.\vec{j}\right) + a_x b_z\left(\vec{i}.\vec{k}\right) + a_y b_x\left(\vec{j}.\vec{i}\right) + a_y b_y\left(\vec{j}.\vec{j}\right) + a_y b_z\left(\vec{j}.\vec{k}\right) + a_z b_x\left(\vec{k}.\vec{i}\right) + a_z b_y\left(\vec{k}.\vec{j}\right) + a_z b_z\left(\vec{k}.\vec{k}\right.$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

جواب ب) :

$$1) \quad \vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$2\ ) \quad \vec{a}.\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

از $\Rightarrow ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$ (1,2)

مثال) زاویه بین دو بردار $\begin{array}{l}\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\end{array}$, را بدست آورید؟

$$\vec{a}.\vec{b} = ab\cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} \\ b = \sqrt{2^2 + (1^2) + (3)^2} = \sqrt{14} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{(3\times 2)+(3\times 1)+(-3\times 3)}{\sqrt{27}\times\sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{27}\times\sqrt{4}} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \sqrt{27} \\ b = \sqrt{14} \end{array}}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

دو بردار بر هم عمودند. چون $\left.\begin{cases}\cos\theta = 0 \\ \cos 90^\circ = 0\end{cases}\right\} \Rightarrow \theta = 90^\circ$

سوال :

نشان دهید که $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$, $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$ هر بردار با خودش زاویه صفر می سازد و هر بردار یکه با بردار یکه دیگر زاویه ۹۰ درجه می سازند.

در مورد بردارهایی که بردار یکه متفاوت دارند ابتدا بزرگی آنها را بدست می اوریم و آنگاه جهت بردار یکه هر یک را از دایره زیر بدست می آوریم. اگر ترتیب بردارهای یکه که در نیم ضرب می شوند در جهت ساعتگرد باشد نتیجه بردار یکه سوم با علامت مثبت است. اما اگر در جهت پادساعتگرد باشد(ترتیب آنها) نتیجه بردار یکه سوم با علامت منفی است.

$$\left|\vec{i}\times\vec{i}\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{i}\right|\sin 0 = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\left|\vec{j}\times\vec{j}\right| = \left|\vec{j}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 0 = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\left|\vec{k}\times\vec{k}\right| = \left|\vec{k}\right|\left|\vec{k}\right|\sin 0 = 1\times 1\times 0 = 0$$

$$\left|\vec{k}\times\vec{i}\right| = \left|\vec{k}\right|\left|\vec{i}\right|\sin 90 = 1\times 1\times 1 \Rightarrow \vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$$

$$\left|\vec{k}\times\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 90 = 1\times 1\times 1 = 1 \Rightarrow \vec{k}\times\vec{j} = \vec{i}$$

$$\left|\vec{i}\times\vec{j}\right| = \left|\vec{i}\right|\left|\vec{j}\right|\sin 90 = 1\times 1\times 1 = 1 \Rightarrow \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$

نکته : در ضرب خارجی بردارها می توان نوشت:

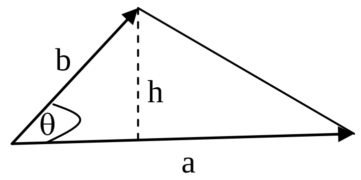
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\left(a_y b_z-a_z b_y\right)\vec{i}-\left(a_x b_z-a_z b_x\right)\vec{j}+\left(a_x b_y-a_y b_z\right)\vec{k}$$

مسئله : نشان دهید که مساحت مثلث حاصل از بردارهای a,b برابر با $\frac{|a\times b|}{2}$است

(یا $\frac{1}{2}|a\times b|$فرقی نمی کند) است. در اینجا خطوط قائم و موازی قدر مطلق کمیت را نشان می دهد.

مساحت مثلث) $s=\frac{ah}{2}$

$$\left.\begin{matrix}\sin\theta=\frac{h}{b}\Rightarrow h=b\sin\theta \\ s=\frac{ah}{2}\end{matrix}\right\}\Rightarrow s=\frac{ab\sin\theta}{2}=\frac{|a\times b|}{2}$$



$$|a\times b|=ab\sin\theta$$

مسئله : دو بردار $\begin{matrix}\vec{A}=2\vec{i}+a\vec{k} \\ \vec{B}=3\vec{i}-\vec{j}\end{matrix}$ را در نظر بگیرید اگر مساحت مثلث حاصل از این دو بردار s باشد، مقدار a برابر خواهد بود با چه مقدار؟

$$s=\frac{|A\times B|}{2}\qquad A\times B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & a \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\vec{i}[0-(a\times(-1))]-j[(2\times 0)-(3\times a)]+k[2\times(-1)-3\times 0]$$

$$A\times B=a\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow|A\times B|=\sqrt{a^2+(3a)^2+(-2)^2}=\sqrt{10a^2+4}$$

$$\Rightarrow s=\frac{|\vec{A}\times\vec{B}|}{2}=\frac{\sqrt{10a^2+4}}{2}\Rightarrow s=\frac{\sqrt{10a^2+4}}{2}\Rightarrow s^2=\frac{10a^2+4}{4}$$

$$\Rightarrow s^2=\frac{5a^2+2}{2}\Rightarrow 2s^2=5a^2+2\Rightarrow sa^2+2=25^2$$

$$\Rightarrow 5a^2=2s^2-2\Rightarrow a^2=\frac{2(\hat{s}-1)}{5}\Rightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2(s^2-1)}}{5}$$

.

سینماتیک

تعریف مسیر حرکت یا مسافت طی شده :

تمام نقاطی را که متحرک طی زمان حرکت از آنها عبور می کند را مسیر حرکت یا مسافت طی شده گویند.

تعریف جابجایی :

پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند.

نکته : همیشه مقدار جابجایی کوچکتر از مسافت طی شده است و در حالت خاطی که متحرک بر روی خط مستقیم حرکت می کند مقدار جابجایی برابر با مسافت طی شده است.

نکته : اگر متحرکی از نقطه ای شروع به حرکت کند و دوباره پس از طی مسافتی به نقطه اول بازگردد گر چه که مسافت طی شده غیر صفر است،اما مقدار جابجایی برابر صفر است زیرا نقطه ابتدا و انتهای حرکت یکی است و فاصله هر نقطه با خوش صفر است.

.

تعریف سرعت متوسط :

۱- به نسبت جابجایی بر زمان سپری شده سرعت متوسط می گویند.

۲- به نسبت تغییرات مکان بر تغییرات زمان می گویند. $\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

۳- به آهنگ جابجایی سرعت متوسط می گویند.

رابطه سرعت متوسط

$$\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{V}$: سرعت متوسط بوده و یکای آن $\left({}^{m}/_{s}\right)$ است.

Δx: تغییر مکان یا جابجایی بوده و یکای آن (m) است.

Δt: علامت تغییرات زمان یا گذر زمان بوده و یکای آن S (ثانیه) است.

x_1 , x_2: بترتیب مکان اول و مکان دوم بوده و یکای آنها (m) است.

t_1 , t_2: بترتیب زمان اول و زمان دوم بوده و یکای آن (S) است.

در برخی موارد مکان اولیه را با X_0 نشان می دهند و اگر لحظه شروع حرکت صفر باشد لذا رابطه سرعت متوسط را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\vec{V} = \frac{x - x_1}{t - t_0} \Rightarrow \vec{V} = \frac{x - x_1}{t}$$

قطاری به طول ۱۰۰ متر می خواهد از طول یکا پل به طول ۴۰۰ متر عبور کند هنگامی که ابتدای قطار از اول پل شروع به حرکت می کند و سرانجام انتهای قطار از پل می گذرد زمانی معادل ۱۰ ثانیه طول می کشد. در این صورت سرعت متوسط قطار را بدست آورید.

$$\left| \begin{array}{c} x_0 = 0 \\ x = 400 + 100 = 500\ m \\ t = 10\,(s) \end{array} \right| \begin{array}{l} \vec{V} = \dfrac{x - x_0}{t} = \dfrac{500}{10} \\ \vec{V} = 50\ {}^{m}/_{s} \end{array}$$

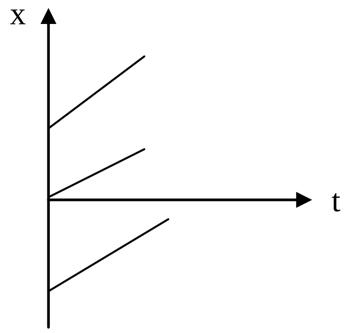
تعریف حرکت مستقیم الخط یکنواخت : حرکتی که در آن متحرک با سرعت ثابت برمسیر مستقیم و بر روی خط راست حرکت می کند را حرکت مستقیم الخط یکنواخت گویند .

نکته :در حرکت با سرعت ثابت متوسط با سرعت الخطه ای یکسان و برابرند . $v = \bar{v}$

تعریف سرعت لحظه ای : به حد سرعت متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک سرعت لحظه ای گویند .

روابط حرکت با سرعت ثابت : $x = vt + x_0$ و $v = \bar{v}$ و $\vec{V} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$

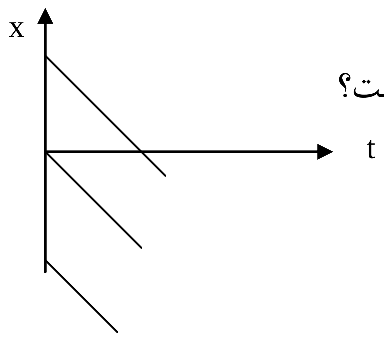
xعلامت جابجایی و یکای آن (m) متر است و Vعلامت سرعت بوده و یکای آن (m/s) است وt علامت زمان بوده و یکای آن (s) ثانیه است . x_0 علامت مکان اولیه متحرک بوده و یکای آن (m) متر است .



الف) نمودار حرکت با سرعت ثابت $x = vt + x_0$

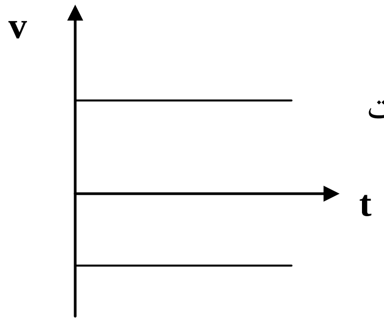
❈ سوال : هر معادله $\begin{vmatrix} 1: x = 2t + 3 \\ 2: x = 3t \\ 3: x = t - 2 \end{vmatrix}$ مربوط به کدام نمودار است؟

نکته:اگر شیب خط صعودی باشد سرعت مثبت $v > o$ شیب نزولی سرعت منفی $v < o$



❈ سوال : هر معادله $\begin{vmatrix} 1: x = -t + 2 \\ 2: x = -2t \\ 3: x = -3t - 4 \end{vmatrix}$ مربوط به کدام نمودار است؟

ب) نمودار سرعت –زمان حرکت با سرعت ثابت



نکته ۱) همانطور که از قسمت الف مشاهده شد نمودار مکان –زمان با سرعت ثابت خط شیب داری است با شیب ثابت که شیب آن سرعت است. .

نکته ۲) همانطور که از قسمت ب مشاهده می شود نمودار سرعت – زمان ثابت خط موازی با محور زمانها است که اگر سرعت مثبت باشد این خط بالای محور t ها و اگر سرعت منفی باشد پائین محور t ها است .

مثال) سرعت یک متحرک $10\ {}^{m}\!/_{s}$ و سرعت متحرک دیگر $15\ {}^{m}\!/_{s}$ است و سرعت هر دو ثابت می باشد اگر اتومبیل اول مسافت $300\ m$ را طی کند در این صورت محاسبه کنید که اتومبیل دوم چه مسافتی را در همان زمان طی خواهد کرد ؟

ابتدا مشخص می کنیم $300\ m$ را اتومبیل اول در چه زمانی پیموده است . آنگاه مسافتی را که اتومبیل دوم در همین مدت زمان پیموده است محاسبه می کنیم : $x_0 = 0$

$$\begin{cases} v_1 = 10\ {}^{m}\!/_{s} \\ t = ? \end{cases} \qquad x_1 = v_{1t} + x_0 \Rightarrow 300 = 10t + 0 \Rightarrow t = {}^{300}\!/_{10} = 30\ s$$

$$\begin{cases} v_2 = 15\ {}^{m}\!/_{s} \\ x_2 = ? \end{cases} \qquad x_2 = v_2 t + x_0 \Rightarrow x_2 = 15 \times 30 + 0 = 450 \Rightarrow x_2 = 450\ (m)$$

مثال)

در یک مسابقه اتومبیل رانی دو اتومبیل A و B که بترتیب با سرعتهای یکنواخت و ثابت $30\,{}^{m}/_{s}$ و $40\,{}^{m}/_{s}$ حرکت می کنند از یک مکان می گذرند، محاسبه کنید هنگامی که اتومبیل A مسافت ۱۰۰ متر را می پیماید اتومبیل B همزمان با او چه مسافتی را می پیماید؟

❋ (ابتدا مدت زمانی که مسافت ۱۰۰ متر توسط اتومبیل A پیموده را محاسبه می کنیم تا مسافت طی شده توسط اتومبیل B بدست آید).

$$\vec{V} = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x - x_0 = vt \qquad A \to 30\,{}^{m}/_{s} \to 100\ m$$

$$x = \vec{v}t + x_0 \qquad B \to 40\,{}^{m}/_{s}$$

$$x_0 = 0$$
$$\vec{V}A = 30\,{}^{m}/_{s}$$
$$\vec{V}B = 40\,{}^{m}/_{s}$$
$$xA = 100\ m$$
$$xB = ?$$

$$xA = \vec{V}At + 0 \Rightarrow 100 = 30t \Rightarrow t = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}(s)$$

$$xB = \vec{V}Bt + x_0 \Rightarrow xB = 40 \times \frac{10}{3} + 0 = \frac{400}{3}$$

$$xB = 133\ /3cm$$

یک شناگر استخری به مسافت 50m را در مدت 40s طی کرده و به نقطه اول باز می گردد. محاسبه کنید که سرعت متوسط این شناگر چقدر است؟

چون دوباره شناگر به مکان اولیه خود برگشته است جابجایی آن برابر صفر است . و چون سرعت متوسط نسبت جابجایی به زمان است لذا سرعت متوسطه هم صفر است.

حرکت شتاب دار

شتاب متوسط : به نسبت تغییرات سرعت به زمان سپری شده را شتاب متوسط گویند.

رابطه شتاب متوسط : $\vec{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$ و $\vec{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$

در این رابطه $\vec{a}$ علامت شتاب متوسط است و یکای آن m/s^2 است. V_1 و V_2 به ترتیب سرعت های اولیه و ثانویه بوده و یکای آن m/s است و Δt زمان سپری شده می باشد و یکای آن (s) ثانیه است.

تعریف شتاب لحظه ای : به حد شتاب متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک شتاب لحظه ای گویند.

روابط حرکت شتاب دار :

معادله مکان ـ زمان
$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

معادله مستقل اززمان
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

معادله سرعت ـ زمان
$$v = at + v_0$$

مثال) اگر متحرکی با شتاب ثابت به حرکت درآید و پس از مدتی مکانی را طی کرد و سرعتش به $9\ m/s$ برسد و پس از آن 50m دیگر را طی کند تا سرعتش به $15\ m/s$ برسد در این صورت محاسبه کنید :

الف) شتاب این متحرک را؟

ب) مسافت و زمانی که متحرک از لحظه صفر تا سرعت $9\ m/s$ طی کرده؟

ج) مسافت دوم حرکت را در چه زمانی طی کرده.

چون شتاب متحرک ثابت است بنابراین در تمام مسیر مقدار شتاب یکسان است ضمناً باید در هر مسئله دقت شود، که دو نقطه را برای حل مسئله انتخاب کنید. پس دو نقطه اول سرعت اولیه دوم سرعت ثانویه.

دقت شود که همیشه روابط را بین دو نقطه به کار می بریم

الف) شتاب حرکت مربوط به کل حرکت است و هر مقداری بدست آمد مربوط به کل حرکت است.

بین نقاط ۱ و ۲)
$$V_2^2 - V_1^2 = 2ax \Rightarrow 15^2 - 9^2 = 2a \times 50$$
$$225 - 81 = 100a \Rightarrow 100a = 144 \Rightarrow a = 1/44\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

ب) (بین نقاط ۰ و۱) $V_2 = at + V_1 \Rightarrow 9 = 1/44t + 0 \Rightarrow t = \dfrac{9}{1/44}(s)$

$$t = \frac{9}{1/44}(s) \text{ و } V_1^2 - V_0^2 = 2ax \Rightarrow 9^2 - 0^2 = 2 \times 1/44x \Rightarrow 81 = 2/88x \Rightarrow x = \frac{81}{2/88}m$$

ج) (بین نقاط ۱ و۲)
$$V_2 = at + V_1 \Rightarrow 15 = 1/44 + 9 \Rightarrow 15 - 9 = 1/44t \Rightarrow 6 = 1/44t$$
$$t = \frac{6}{1/44}(s)$$

الف)
$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 15^2 - 9^2 = 2a \times 50 \Rightarrow 225 - 81 = 100a = 144 = 100a \Rightarrow a = \frac{144}{100} \Rightarrow a = 1/44\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

ب)
$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 9^2 - 0^2 = 2 \times 1/44\Delta x \Rightarrow 81 = 2/88\Delta x \Rightarrow \Delta x = {}^{81}\!/_{2/88}$$
$$v_1 = at + v_0 \Rightarrow 9 = 1/44t_0 \Rightarrow 1/44t = 9 \Rightarrow t = {}^{9}\!/_{1/44} = 6/25 \Rightarrow t = 6.25(s)$$

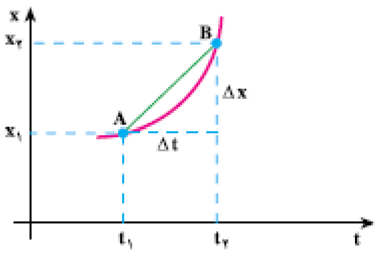
ج)
$$v_2 - v_1 = at \Rightarrow 15 - 9 = 1/44t \Rightarrow 6 = 1/44t \Rightarrow t = {}^{6}\!/_{1/44}\ {}^{s}$$
$$(v_2 = at + v_1)$$

تعیین سرعت و شتاب با استفاده از نمودار

الف) تعیین سرعت با استفاده از نمودار مکان – زمان

سؤال) چگونه سرعت متوسط را از نمودار مکان – زمان تعیین می کنند؟ (با رسم شکل توضیح دهید).

جواب) با توجه به تعریف سرعت متوسط $\vec{v} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ و با توجه به تعریف شیب خط AB می توان نوشت:

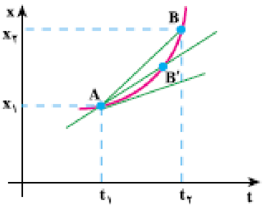


$$\text{بزرگی شیب خط AB} = \tan\theta = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

پس می توان گفت شیب خط بین دو نقطه در نمودار مکان – زمان برابر سرعت متوسط است.

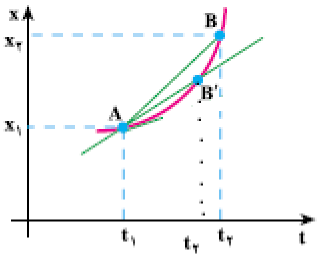
سؤال) چگونه سرعت لحظه ای را از نمودار مکان - زمان تعیین می کنند؟ با رسم شکل توضیح دهید.

جواب) سرعت لحظه ای سرعت در یک زمان و لحظه است لذا اگر دو نقطه در بالا به هم نزدیک شوند در این صورت شیب خط مماس بر منحنی در هر لحظه برابر سرعت لحظه ای است.



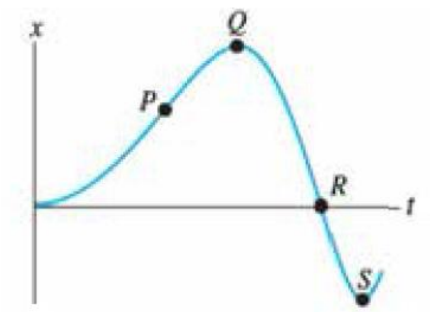
طبق نمودار شکل روبرو با ذکر دلیل سرعت متوسط بین لحظات t_1 تا t_2 $(AB^/)$بین لحظات t_1 تا t_3 (AB)مقایسه کنید.

جواب)



ابتدا شیب خط بین دو نقطه را رسم می کنیم. و چون بزرگی شیب خط بین دو نقطه سرعت متوسط را نشان می دهد لذا هر کدام که شیب بزرگتری داشته باشند سرعت متوسط بین آن دو لحظه بیشتر است. که طبق شمل مشخص است. بین لحظات t_1 و t_3 شیب بزرگتر،لذا سرعت متوسط بیشتر است.

سوال) بزرگی سرعت ذره را در نقطه‌های P، Q، R و S از سریع‌ترین تا کندترین مرتب کنید.

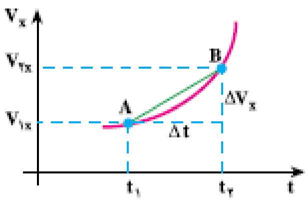


ب) تعیین شتاب با استفاده از نمودار سرعت – زمان

سوال) چگونه شتاب متوسط را از نمودار سرعت – زمان تعیین می کنند؟ با رسم شکل توضیح دهید.

جواب) با توجه به تعریف شتاب متوسط $\vec{a}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ و با توجه به تعریف شیب خط AB می توان

$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \tan\theta =$ شیب خط ⇐ AB بزرگی شیب خط بین نقاط ابتدایی و انتهایی $= \vec{a}$



پس می توان گفت شیب خط بین دو نقطه (در دو لحظه) در نمودار سرعت – زمان برابر شتاب متوسط است.

سؤال) چگونه شتاب لحظه ای را از نمودار سرعت – زمان تعیین می کنند؟

جواب) شتاب لحظه ای شتاب در یک لحظه و زمان است لذا اگر دو نقطه در شتاب متوسط (شکل بالا) به هم نزدیک شوند در این صورت دو نقطه یک نقطه شده و خط ما بین دو نقطه این بار به صورت شیب مماس بر منحنی در هر لحظه ظاهر می شود. پس شیب خط مماس بر منحنی در هر لحظه برابر شتاب لحظه ای است.

مثال) معادله حرکت یک متحرک به صورت $X= 3t^2-2t - 4$ است.

الف: سرعت متوسط آن را بین لحظات $t_1 = 1_s$ و $t_2 = 3_s$ بدست آورید؟ الف) $\begin{cases} \vec{V} = ? \\ t_1 = 1_s \\ t_2 = 3_s \end{cases}$

ب: سرعت لحظه ای آن را در زمان $t=4_s$ بدست آورید؟

ب) $\begin{cases} V=? \\ t=4_s \end{cases}$

ج: شتاب متوسط آن را در لحظات $t_1=2_s$ تا $t_2=5_s$ را محاسبه کنید؟

ج) $\begin{cases} a=? \\ t_1=2_s \\ t_2=5_s \end{cases}$

د : شتاب لحظه ای آن در لحظه ۸۰ ثانیه چه مقدار است؟

الف)

$$\vec{V}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\Rightarrow \left| \begin{array}{l} t_1=1_s, x_1=3\times1^2-2\times1-4=-3\Rightarrow x_1=-3m \\ t_2=3_s, x_2=3\times3^2-2\times3-4=27-6-4= \\ 17\,m\Rightarrow x=17\,cm \end{array}\right.$$

$$\vec{V}=\frac{17-(-3)}{3-1}=\frac{20}{2}=10\Rightarrow \vec{V}=10\,{}^{m}\!/_{s}$$

ب)

$$V=\frac{dx}{dt}=\left.\begin{array}{c} 6t-2 \\ t=4s \end{array}\right\}\Rightarrow V=6\times4-2=22\Rightarrow V=22\,{}^{m}\!/_{s}, V=6t=3$$

ج)

$$\vec{a}=\frac{V_2-V_1}{t_2-t_1}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_1=2s, V_1=6\times2-2=10\Rightarrow V=20\,{}^{m}\!/_{s\,1} \\ t_2=5s, V_2=6\times5-2=28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_2=28$$

$$\vec{a}=\frac{28-10}{5-2}=\frac{18}{3}=6\Rightarrow \vec{a}=6\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

د)

$$\left\{\begin{array}{l} V=6t-2 \\ a=\dfrac{dv}{at} \end{array}\right\}\Rightarrow a=6\,{}^{m}\!/_{s^2}$$

چون a عددی ثابت شد یعنی شتاب لحظه ای در تمام لحظات a=6 است.

❋ نکته ۱ :

طبق حل مثال فوق حتما متوجه شده اید که : حد سرعت متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک برابر سرعت لحظه ای است. پس می توان نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\vec{V}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\\ V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{V}\end{array}\right\}\Rightarrow V\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=V=\frac{dx}{dt}$$

مثال : $x=۲t^{۳}+۳t^{۲}-۴t\Rightarrow V=\dfrac{dx}{dt}=۶t^{۲}+۶t-۴$

*** نکته ۲ :** طبق حل مثال فوق حتما متوجه شده اید که :

شتاب لحظه ای برابر است با حد شتاب متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک که Δt به سمت صفر میل می کند.

$$\left.\begin{array}{l}\bar{a}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}\\ a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar{a}\end{array}\right\}\Rightarrow a=\lim\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

$$\left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{dv}{dt}\\ V=\dfrac{dx}{dt}\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{d\left(\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt}=a=\frac{d^{2}x}{dt^{2}}$$

مثال :

$$x=2t^{4}+3t^{2}-t+5$$

$$V=\frac{dx}{dt}=8t^{3}+6t-1$$

$$a=\frac{dv}{dt}=24t^{2}+6$$

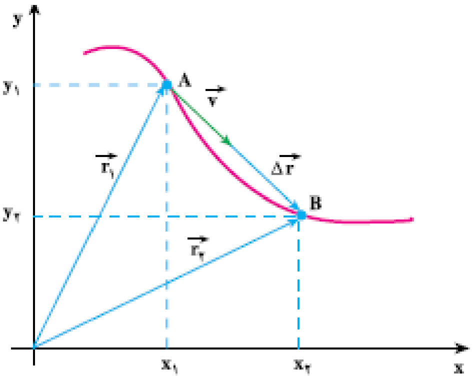
$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{V}=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\\ V=\dfrac{dx}{dt}\\ \bar{a}=\dfrac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\\ a=\dfrac{dv}{dt}\end{array}}$$

نتیجه :

شتاب متوسط و سرعت متوسط همیشه بین دو لحظه t_1 و t_2 محاسبه می شود. اما شتاب لحظه ای و سرعت لحظه ای همیشه در یک زمان t بدست می آید. و برای محاسبه آنها مشتق گیری لازم است.

حرکت دو بعدی

اکثر حرکاتی که در طبیعت وجود دارد به صورت دو بعدی می باشد بنابراین لازم است که حرکت اجسام در ۲ بعد هم مورد بررسی قرار گیرد مثلاً اگر در نمودار X0Y شکل روبرو متحرکی از نقطه A به نقطه B حرکت کند در این صورت بردارهای مکان و جابجایی برای این متحرک به صورت شکل زیر خواهد بود.



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ که مکان متحرک را نسبت مبدأ مختصات مشخص می کنند را بردار مکان می گویند.

و بردار جابجایی $\Delta\vec{r}$ پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند. به دلیل آنکه در دو بعد بردار آن دارای مؤلفه های X و Yمی باشد $\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ بنابراین با توجه به این رابطه بردار مکان و تعریف سرعت متوسط که برابر است با نسبت جابجایی به زمان طی شده بنابراین رابطه سرعت متوسط به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\vec{V} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} = \vec{v}_x\vec{i} + \vec{v}_y\vec{j}$$

برداری

بزرگی

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{V}_x\vec{i} + \vec{V}_y\vec{j} \\ v = \sqrt{\vec{v}_x^{\,2} + \vec{v}_y^{\,2}} \end{cases}$$

طبق رابطه $\vec{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ به دلیل آنکه Δt یک کمیت نرده ای است و جهت ندارد بنابراین هر جهتی که جابجایی داشته باشد. همان جهت را هم سرعت متوسط خواهد داشت بنابراین همیشه بردار سرعت متوسط هم جهت با بردار جابجایی می باشد.

تعریف بردار مکان :

برداری است که مبدأ مختصات را به مکان جسم در دستگاه وصل می کند.

بردار جابجایی :

پاره خط جهت دار و مستقیمی است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند.

روابط بردار مکان، بردار جابجایی، سرعت متوسط و سرعت لحظه ای.

بردار های مکان

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}\\ \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}\end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

بردارجابجایی

$$\overrightarrow{\Delta r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}$$

بردارسرعت متوسط

$$\overline{V} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\overline{V} = \overline{V}x\vec{i} + \overline{V}y\vec{j}$$

بزرگی سرعت متوسط

$$\overline{V} = \sqrt{\overline{V}_x^2 + \overline{V}_y^2}$$

سرعت لحظه ای

$$\left.\begin{array}{l}V = \overline{V}\\ \Delta t \to 0\\ \overline{\vec{V}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\end{array}\right\}\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}\right)$$

بردار سرعت لحظه ای

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} \Rightarrow V = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{V} = vx\vec{i} + vy\vec{j}$$

بزرگی سرعت لحظه ای

$$V = \sqrt{Vx^2 + Vy^2}$$

بردار شتاب متوسط

$$\left.\begin{aligned} \overline{\vec{a}} &= \frac{dv}{dt} \\ \vec{V} &= Vx\vec{i} + Vy\vec{j} \end{aligned}\right\} \overline{\vec{a}} = \frac{\Delta\left(Vx\vec{i} + vy\vec{j}\right)}{\Delta t} \Rightarrow \overline{\vec{a}} = \frac{\Delta vx}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta vy}{\Delta t}\vec{j}$$

$$\overline{\vec{a}} = \overline{a}x\vec{i} + \overline{a}y\vec{j}$$

بزرگی شتاب متوسط

$$\overline{a} = \sqrt{\overline{a}_x^2 + \overline{a}2_y^2}$$

بردارشتاب لحظه ای

$$\vec{a} = \lim \overline{\vec{a}} = \lim\left(\frac{\Delta vx}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta vy}{\Delta t}\vec{j}\right)$$

$$\vec{a} = \lim \frac{\Delta vx}{\Delta t}\vec{i} + \lim \frac{\Delta vy}{\Delta t}\vec{j} \Rightarrow a = \frac{dvx}{at}\vec{i} + \frac{dvy}{at}\vec{j}$$

بزرگی شتاب لحظه ای

$$\vec{a} = ax\vec{i} + ay\vec{j}$$

$$a = \sqrt{a^2x + a^2y}$$

تعریف سرعت لحظه ای :

سرعت لحظه ای برابر است با حد سرعت متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچکی که Δt هم به سمت صفر میل می کند.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}, \begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt}, V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ V = \sqrt{V_x^2 + V_y} \end{cases}$$

پس می توان گفت سرعت لحظه ای همان مشتق جابجایی نسبت به زمان است اما در مورد

تعیین جهت بردار سرعت لحظه ای می توان گفت که اگر نقطه B به A آنقدر نزدیک شود دو

نقطه تقریباً یکی می شود در این صورت بردار جابجایی مماس بر مسیر حرکت است و چون Δt هم به سمت صفر میل کرده لذا سرعت متوسط به سرعت لحظه ای تبدیل می شود. و می توان گفت سرعت لحظه ای هم جهت با جابجایی در هر لحظه و مماس بر مسیر حرکت است.

مثال) معادله حرکت یک جسم $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t + 5 \end{cases}$ است در این صورت محاسبه کنید.

الف) سرعت متوسط این جسم را در بازه زمانی $t_1 = 2(s)$ تا $t_2 = 4s$

ب) سرعت لحظه ای این جسم را در زمان $t = 3s$ ؟

الف) $\vec{v} = \vec{v}_x \vec{i} + \vec{v}_y \vec{j}$

$$\vec{V}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 = 2(2)^2 + 1 = 9 \\ x_2 = 2(4)^2 + 1 = 33 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{V}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{33 - 9}{4 - 2} = 12 \, m/s$$

$$\vec{v}_{y} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \begin{bmatrix} y_1 = 3 \times 2 + 5 = 11 \\ y_2 = 3 \times 4 + 5 = 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_{y} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{17 - 11}{4 - 2} = 3 \, m/s$$

برداری $\vec{v} = 12\vec{i} + 3\vec{j}$ بزرگی $\vec{v} = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \Rightarrow \begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = 4t \\ v_y \frac{dy}{dt} = 3 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} Vx = 4t = 4 \times 3 = 12 \\ Vy = 3 \, m/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{V} = 12\vec{i} - 3\vec{j} \\ v = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{برداری}}$ $\boxed{\text{بزرگی}}$

نکته : در مورد سرعت لحظه ای ذکر روابط زیر لازم است.

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}, Vx = \frac{dx}{dt}, V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

مثال: معادله حرکت یک متحرک بصورت $\begin{cases} x = -2t^2 + 4t + 5 \\ y = t^3 - 2t + 1 \end{cases}$ می باشد. در این صورت :

الف) سرعت متوسط آن را بین لحظات $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$ بدست آورید؟

ب) سرعت لحظه ای آن را در $t = 2s$ بدست آورید؟

ج) شتاب متوسط را در بازه زمانی $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 4s$ بدست آورید؟

د) شتاب لحظه ای آن را در لحظه $t = 5s$ بدست آورید؟

نکته :

هرگاه که معادله حرکت بر حسب درجه زمان ار درجه دو باشد شتاب ثابت بوده و شتاب لحظه ای و متوسط برابر هستند.

$$\vec{\bar{V}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\vec{i} + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}\vec{j} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1 = -2\times(1)^2 + 4\times1 + 5 = 7 \Rightarrow x_1 = 7m \\ x_2 = -2(3)^2 + 4\times3 + 5 = -1 \Rightarrow x_2 = -1m \end{cases} \\ \begin{cases} y_1 = 1^3 - 2\times1 + 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \\ y_2 = 3^3 - 2\times3 + 1 = 22 \Rightarrow y_2 = 22\,m \end{cases} \end{cases}$$

الف) $\begin{cases} \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{-1-7}{3-1} = \dfrac{-8}{2} = -4 \\ \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{22-0}{3-1} = 11 \end{cases}$

$$\bar{V} = \sqrt{(-4)2 + 11^2} = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137} \Rightarrow \bar{V} = \sqrt{137}$$

بزرگی

ب) $\Rightarrow \vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

$$Vx = \frac{dx}{dt} = -4t + 4 \rightarrow \frac{dx}{dt} = -4\times2 + 4 = -4 \left| \begin{cases} Vx = -4t + 4 \\ Vy = 3t^2 - 2 \end{cases} \right.$$

$$Vy = \frac{dy}{dx} = 3t^2 - 2 \rightarrow 3\times2^2 - 2 = 10$$

برداری $\vec{V} = -4\vec{i} + 10\vec{j}$

بزرگی $V = \sqrt{(-4)^2 + 10^2} = \sqrt{16 + 100} = \sqrt{116} \Rightarrow V = \sqrt{116}$

ج) $\vec{\bar{a}} = \frac{\Delta vx}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta vy}{\Delta t}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = \frac{Vx_2 - Vx_1}{t_2 - t_1}\vec{i} + \frac{Vy_2 - Vy_1}{t_2 - t_1}\vec{j}$

$$\begin{cases}\begin{cases} Vx_1 = -4\times 3+4=-8 \\ Vx_2 = -4\times 4+3=-13\end{cases} \\ \begin{cases} Vy_1 = 3\times 3^2-2=25 \\ Vy_2 = 3\times 4^2-2=46\end{cases}\end{cases}
\quad
\begin{aligned}
&\overline{\overline{a}} = \frac{-12-(-8)}{4-3}\vec{i} + \frac{46-25}{4-3}\vec{j} \\
&\overline{\overline{a}} = -4\vec{i} + 21\vec{j} \\
&\bar{a} = \sqrt{(-4)^2 + (21)^2} \\
&\bar{a} = \sqrt{16+441} = \sqrt{457} \\
&\bar{a} = \sqrt{457}\ m/s^2
\end{aligned}$$

د) $\begin{cases} Vx = -4t+4 \\ Vy = 3t^2-2 \end{cases}$

$$\vec{a} = \frac{dvx}{dt}\vec{i} + \frac{dvy}{dt}\vec{j} \Rightarrow ax = \frac{dvx}{dt} = -4$$

$$ay = \frac{dvy}{dt} = 6t \Rightarrow \frac{dvy}{dt} = 6\times 5 = 30\ m/s^2$$

برداری $\vec{a} = -4\vec{i} + 30\vec{j}$

بزرگی $a = \sqrt{(-4)^2 + 30^2} = \sqrt{16+900} \Rightarrow a = \sqrt{916}\ m/s^2$

شتاب متوسط :

به نسبت تغییرات سرعت به زمان طی شده شتاب متوسط و از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\overline{\overline{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\Delta V_x\vec{i} + \Delta V_y\vec{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\vec{j} = \vec{a}_x\vec{i} + \vec{a}_y\vec{j}, \vec{a}_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}, \vec{a}_y = \frac{\Delta V_y}{\Delta t}$$

$\vec{a} = \vec{a}_x\vec{i} + \vec{a}_y\vec{j}$ **برداری**

$\vec{a} = \sqrt{\vec{a}_x^{\,2} + \vec{a}_y^{\,2}}$ **بزرگی**

طبق رابطه $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ چون Δt نرده ای است و جهت ندارد لذا شتاب متوسط هم جهت با تغییرات سرعت است.

تعریف شتاب لحظه ای :

به حد شتاب متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک که $\Delta t \to 0$ شتاب لحظه ای گویند.

روابط شتاب لحظه ای :

$$a = \lim \vec{a} = \lim \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\right)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$ و $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{a} = \dfrac{dv_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dv_y}{dt}\vec{j} \\ a_x = \dfrac{dv_x}{dt}, a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \\ a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y} \end{array} \right.$$

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$	برداری
$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y}$	بزرگی

مثال) معادلات حرکت یک متحرک بصورت $x = 2t^2 + t - 3$ و $y = t^3 - 2$ است در این صورت :

الف) بزرگی شتاب متوسط را در بازه های زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 4s$ حساب کنید.

ب) شتاب لحظه ای را در زمان $t = 3s$ حساب کنید.

دقت شود که با مشتق گرفتن از X,Y به V_x و V_y برسیم چون برای شتاب V_1 و V_2 نیاز داریم.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t + 1$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} 3t^2 \qquad \overrightarrow{a_x} = \bar{a}_x \vec{i} + \bar{a}_y \vec{j}, \vec{a} = \sqrt{\bar{a}^2{}_x + \bar{a}^2{}_y}$$

$$a = \frac{V_2 x - V_1 x}{t_2 - t_1} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} v_{1_x} = 4 \times 1 + 1 = 5 \, {}^m\!/_s \\ v_{2_x} = 4 \times 4 + 1 = 17 \, {}^m\!/_s \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{a}_x = 4 \, {}^m\!/_{s^2}$$

$$\bar{a}_y = \frac{V_2 y - V_1 y}{t_2 - t_1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_1 y = 3 \times 1^2 = 3 \, {}^m\!/_s \\ v_2 y = 3 \times 4^2 = 48 \, {}^m\!/_s \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{a}_y = \frac{17 - 5}{4 - 1} = 4 = \bar{a}_y = 4 \, {}^m\!/_{s^2}$$

$$\vec{a} = \sqrt{\bar{a}^2 x + \vec{a}^2 y} = \sqrt{4^2 + 15^2} = \sqrt{241} \Rightarrow \bar{a} = \sqrt{241}\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

برداری

$$\vec{a} = 4\dot{i} + 15\vec{j}$$

ب) مستقل از t

$$\vec{a} = a_x \dot{i} + a_y \vec{j}$$

$$v_x = 4t - 1 \qquad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \to a_x = 4\ {}^{m}\!/_{s}$$

$$v_y = 3t^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = 6t \to a_y = 6 \times 3 = 18\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

بزرگی

$$a = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y} = \sqrt{4^2 + 18^2} = \sqrt{16 + 324} \Rightarrow \vec{a} = \sqrt{340}\ {}^{m}\!/_{s^2}$$

برداری

$$\vec{a} = 4\dot{i} + 18\vec{j}$$

سقوط آزاد

حرکت اجسام به سمت پایین یا به سمت بالا در راستای قائم را سقوط آزاد گویند. در حرکت سقوط آزاد اگر سمت بالا مثبت انتخاب شد به دلیل آنکه شتاب گرانشی g همیشه به سمت پایین است بنابراین g منفی خواهد شد . اما در مورد سرعت اگر متحرک چه از پایین مبدأ یا چه از بالای مبدأ به سمت بالا حرکت کند مقدار سرعت آن مثبت اما برعکس اگر به سمت پایین حرکت کند سرعت آن منفی است اما اگر متحرک بالای مبدأ برود مکان های y آن مثبت اما اگر زیر مبدأ حرکت کنند مکان های y آن منفی است.

$$Y = {}^{1}\!/_{2}\, gt^2 + v_0 t + y_0$$

$$v = -gt + v_0$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy$$

مثال) جسمی از بالای ساختمان به ارتفاع 50m به سمت بالا پرتاب می شود اگر سرعت اولیه پرتاب $20\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$ باشد محاسبه کنید :

الف) از بالای ساختمان این جسم حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود.

ب) این ارتفاع را در چه مدت زمانی طی می کند

ج) چه زمانی طول می کشد تا به زمین برسد

د) سرعت جسم هنگام برخورد با زمین چقدر است؟

در بالاترین نقطه ای که جسم می رسد جسم لحظه ای ساکن مانده و سرعت در آنجا صفر است. چون به سمت بالا پرتاب شده پس مقدار VO مثبت است و جسم بالای مبدأ هم رفته پس y هم مثبت است.

الف) $v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - 20^2 = -2 \times 10y \Rightarrow -400 = -20y \Rightarrow y = \frac{-400}{-20} = 20 \Rightarrow y = 20m$

ب) $v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10t + 20 \Rightarrow 10t = 20 \Rightarrow t = 2s$

ج) چون حین پرتاب اولیه V_0 به سمت بالا بود لذا V_0 عددی مثبت است ضمناً مکان آن هم ۵۰ متر پایین مبدأ است لذا $y = -50m$ و مکان پرتاب مبدأ است. $y_0=0$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + V_0 \Rightarrow -50 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 20t + 0 \Rightarrow -50 = -5t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 20t - 50 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = t = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1) - (-10)}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$= \frac{4 + 7/48}{2} = \frac{11/48}{2} = 5/74$$

$$t = 5/74\,s$$

د) $v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -10 \times 5/74 + 20 \Rightarrow v = -57/4 + 20 \Rightarrow v = -37/4\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$

مثال) در مسئله قبل اگر جسم با سرعت $20\, {}^{m}\!/_{s}$ به سمت پایین پرتاب می شود چه زمانی طول می کشید به زمین برسد و با چه سرعتی به زمین می رسید.

چون این بار با سرعت اولیه به سمت پایین پرتاب شده و جهت پایین خلاف جهت مثبت است لذا در رابطه مقدار V_0 را منفی قرا می دهیم و چون ما به سمت زیر مبدأ حرکت می کنیم مقدار $y=-50$ یعنی منفی است.

$$y = -\tfrac{1}{2} gt^2 + v_0 t + y_0$$
$$\Rightarrow -50 = -\tfrac{1}{2} \times 10 \times t^2 + (-20)t + 0 \Rightarrow -50 = -5t^2 - 20t$$
$$\Rightarrow 50 = 5t^2 + 20t \Rightarrow 5t^2 + 20t - 50 = 0$$
$$\Rightarrow t^2 + 4t - 10 = 0$$
$$t = \frac{-b \times \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-10)}}{2 \times 1} \Rightarrow t = \frac{-4 \pm 7/48}{2}$$
$$= \frac{-4 + 7/48}{2} = 1/74\, s \Rightarrow t = 1/74\, s$$
$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -10 \times 1/74 - 20 = -17/4 - 20 = -37/4\, {}^{m}\!/_{s}$$
$$v = -37/4\, {}^{m}\!/_{s}$$

مثال) جسمی را با سرعت $10\, {}^{m}\!/_{s}$ به سمت بالا پرتاب می کنیم در این صورت محاسبه کنید:

الف) این جسم تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی طول می کشد؟

ب) سرعت این جسم در ارتفاع 2m چقدر است و چه زمانی طول می کشد تا به این ارتفاع برسد؟

چون که جسم به سمت بالا پرتاب می شود مقدار سرعت اولیه به سمت بالا مثبت است. ضمناً جسم به بالای مبدأ می رود. لذا مکان های y آن مثبت است همچنین در بالاترین ارتفاع سرعت صفر است.

الف)
$$v_1^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - 10^2 = -2 \times 10\, y = -100 = -20\, y \Rightarrow y = 5m$$
$$v = -gt + v0 \Rightarrow 0 = -10t + 10 \Rightarrow 10t = 10 \Rightarrow t = 1s$$

مقدارy=2 چون بالای مبدأ است مقدار مثبت دارد.

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow v^2 - 10^2 = -2 \times 10 \times 2 \Rightarrow v^2 - 100 = -40 \Rightarrow v^2 = 100 - 40$$

ب) $$\Rightarrow v^2 = 60 \Rightarrow v\sqrt{60} \Rightarrow v = 7/74 \, {}^{m}\!/_{s}$$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow 7/74 = -10t + 10 \Rightarrow 10t = 10 - 7/74 \Rightarrow 10t = 2/26 \Rightarrow t = /226 \, s$$

سقوط آزاد :

کاربرد برای پیدا کردن	مستقل از	حرکت سقوط آزاد	حرکت افقی شتابدار
y ,t	v	$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$ معادله حرکت (مکان – زمان)	$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$
v ,t	x	$v = -gt + v_0$ معادله سرعت - زمان	$v = at + v_0$
v_2,y	t	$v_2^2 - v_1^2 = -2g\Delta y$ معادله مستقل از زمان	$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x$ $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$

مثال)

گلوله ای را از ساختمانی به ارتفاع 30m به سمت بالا پرتاب می کنیم، اگر این گلوله ۸ ثانیه طول بکشد تا به نقطه پرتاب برسد در این صورت محاسبه کنید:

الف) با چه سرعت اولیه ای به سمت بالا پرتاب شده است؟

ب) حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ج) از لحظه پرتاب تا رسیدن گلوله به زمین چه مدت زمانی طول می کشد؟

د) گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟

جواب:

الف) اگر گلوله با سرعت V_0+ بالا رود هنگام برگشت در همان نقطه ، چون جهتش به سمت پایین است سرعتی V_0- دارد.

الف) $= V = gt + V_0$

$$-V_0 = -10 \times 8 + V_0$$
$$-V_0 - V_0 = -80 \Rightarrow -2V_0 = -80$$
$$V_0 = \frac{-80}{-2x} = 40 \Rightarrow V_0 = 40 \, {}^{m}\!/_{s}$$

در نقطه اوج $V^2 = B$

ب)
$$V_2^2 - V_1^2 = -2g\Delta y$$
$$V^2 - V_0^2 = -2gh \Rightarrow 0^2 - 40^2 = -2 \times 10h$$
$$-40^2 = -20h \Rightarrow h = \frac{-1600}{-20} = 80(m)$$

ج)
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \times y_0$$
$$-30 = -\frac{1}{2} \times 10t^2 + 40t + 0$$
$$5t^2 - 40t - 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 6 = 0$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$
$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 24}}{2} = \frac{8 + \sqrt{88}}{2} = 8/69(s) \rightarrow t = 8/69(s)$$

د) $V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$ $\qquad V^2 - (40)^2 = -2 \times 10 \times (-30) \Rightarrow V^2 - 1600 = 600$

$$V^2 = 600 + 1600 = 2200 \Rightarrow V = \sqrt{2200} = 46/9 \, {}^{m}\!/_{s}$$

راه دوم)
$$\Rightarrow V = -gt + V_0 = -10 \times 8/69 + 40 = -86/9 + 40 = -46/9$$
$$\Rightarrow V = -46/9 \, {}^{m}\!/_{s}$$

نکته :

در مسئله قبل گلوله ۸ثانیه طول کشیده تا از پشت بام بالا رفته و دوباره به سطح آن باز گردد. پس طبق قسمت ج (زمان ۸/۶۹ ثانیه) تنها۰/۶۹ ثانیه طول می کشد تا گلوله از پشت بام به زمین برسد. که این موضوع در مسئله بعد تحقیق می شود.

مثال : اگر طبق مسئله قبل گلوله ای با سرعت $40\ {}^{m}\!/_{s}$ از پشت بامی به ارتفاع 30m مستقیماً به سمت زمین پرتاب شود. در این صورت:

الف) مدت زمانی که طول می کشد تا گلوله به زمین برسد را محاسبه کنید؟

ب) سرعت آن هنگام برخورد به زمین را بدست آورید؟

$$\rightarrow\ y = -\frac{1}{2}gt^{2} + V_{0}t + V_{0}$$

الف) $$-30 = -\frac{1}{2}\times 10\,t^{2} - 40\,t + 0$$

$$5t + 40\,t - 30 = 0 \Rightarrow t^{2} + 8t - 60 = 0$$

$$t = \frac{(-a)\pm\sqrt{(8)^{2} - 4\times 1\times(-6)}}{2\times 1} = \frac{-8\pm\sqrt{88}}{2} \Rightarrow t = \frac{-8\pm\sqrt{88}}{2} = \frac{-8+9/38}{2} = \frac{9/38}{2} = 0/69$$

$$t = 0/69\,(s)$$

ب) $$V = -gt + V_{0} \Rightarrow V = -10\times 0/69 - 40 = -6/9 - 40$$

$$V = 4/69\ {}^{m}\!/_{s}$$

مثال)

از بالای یک ساختمان بسیار بلند گلوله اول از حالت سکون و ۲ ثانیه بعد گلوله دوم با سرعت اولیه $10\ {}^{m}\!/_{s}$ به سمت پایین پرتاب می شود. در این صورت این دو گلوله پس از طی چه مکانی و زمانی به هم می رسند؟

گلوله اول) $y_1 = -\frac{1}{2} g t_1^2 + v_{0_1} t_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \times 9/8 t^2 + 0t$

گلوله دوم) $y_2 = -\frac{1}{2} g t_2^2 + v_{0_2} t_2 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2} \times 9/8 (t-2)^2 + 10(t-2)$

در جایی که به هم می رسند $\leftarrow [y_1 = y_2]$

$$\begin{cases} y_1 = -4/9t^2 \\ y_2 = -4/9(t-2)^2 - 10(t-2) \end{cases}$$

$$y^1 = y_2 \Rightarrow -4/9t^2 = -4/9(t-2)^2 - 10(t-2)$$
$$-4/9t^2 = -4/9(t^2 - 4t + 4) - 10t + 20$$
$$-4/9t^2 = -4/9t^2 + 19/6 - 10t + 20$$

$0 = 19/6t - 10t - 19/6 + 20 \Rightarrow 9/6 + 0/4 = 0$ چون t منفی شد یعنی به هم نمی رسند.

$$\Rightarrow t = \frac{-0/4}{9/6}$$

$$y = -4/9t^2 \Rightarrow y = -4/9(1/337)^2$$
$$y = -8/75(m)$$

از یک ساختمان بسیار بلند گلوله اول $10 \, {}^{m}\!/_{s}$ به سمت پایین پرتاب می شود و یک ثانیه بعد گلوله دوم با سرعت $30 \, {}^{m}\!/_{s}$ به سمت پایین پرتاب می شود. در این صورت این دو گلوله پس از طی چه زمان و مسافتی به هم می رسند.

گلوله اول) $y_1 = -\frac{1}{2} g h_1^2 + V_{0_1} t \Rightarrow y_1 = -4/9t^2 - 10t$

گلوله دوم) $y_2 = -\frac{1}{2} g t_2^2 + V_{0_2} t_2 \Rightarrow y_2 = -4/9(t-1)^2 - 30(t-1)$

$$\begin{cases} V_{x_1} = -10 \\ V_{y_2} = -20 \end{cases}$$

$$y_1 = y_2$$
$$-4/9t^2 - 10t = 4/9(t-1)^2 - 30(t-1)$$

$$t = ? \Rightarrow y = -4/9t^2 - 10t$$

مثال)

ساختمانی به ارتفاع 50m وجود دارد و همزمان یکی از بالای ساختمان گلوله ای را از حال سکون رها می کند و دیگری از روی زمین گلوله ای دیگر را با سرعت $20\ {}^{m}\!/\!{}_{s}$ به سمت بالا پرتاب می کند. در این صورت این گلوله ها پس از چه زمانی و در چه ارتفاعی به هم می رسند.

❋ دقت شود که مکان y_0 با مبدأ یکی نیست مثلاً در همین مسئله اگر زمین مبدأ باشد $y_{0_1} = 0$ اما $y_{0_2} = 50\,m$ است.

$$y_1 = y_2$$

گلوله اول) $\quad y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0_1}t + y_0$

گلوله دوم) $\quad y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0_2}t + y_{0_2}$

$$\begin{cases} y_1 = -4/9t + 20t + 0 \Rightarrow y_1 = -4/9t^2 + 20t \\ y_2 = -4/9^2 + 0t + 50 \Rightarrow y_2 = -4/9t^2 + 50 \end{cases}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -4/9t^2 + 20t = -4/9t^2 + 50$$

$$20t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{20} = 2/5(s)$$

$$y_2 = -4/9t^2 + 50 = -4/9 \times (2/5)^2 + 50$$

$$y = -4/9 \times 6/25 + 50 = -30/825 + 50 \Rightarrow y = 19/175\ m$$

مثال)

الف) گلوله ای را با چه سرعتی در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب کنیم تا به ارتفاع 15m برسد؟

ب) این گلوله چه مدت در هوا خواهد ماند؟

چون فقط تا ارتفاع 15m می خواهیم گلوله بالا برود پس در ارتفاع 15m لحظه ای ساکن ایستاده و سرعتش صفر است چون حرکت به سمت بالا بوده و همچنین بالای مبدأ است هم سرعت و هم مکان y هر دو مثبتند.

در بالاترین نقطه سرعت برابر صفر است.

الف) $v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - v_0^2 = -2 \times 10 \times 15 \Rightarrow 0 - v_0^2 = -300\ m \Rightarrow v_0^2 = 300$

$$v0 = \sqrt{300}$$

$$v_0 = \sqrt{300} = 17/22 \quad \Rightarrow v_0 = 17/3\, {}^{m}\!/_{s}$$

ب) $v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10t + 17/3 \Rightarrow 10t = 17/3 \Rightarrow t = \frac{17/3}{10}$

$= 1/73 \Rightarrow t = 1/73\, s$

.

حرکت پرتابی

در این نوع حرکت متحرک و جسم به دلیل پرتاب در دو بعد حرکت می کنند که با مشخص بودن جهت سرعت اولیه می توان مقادیر جابجایی سرعت و شتاب را به صورت روابط زیر بدست آوریم.

شتاب $\left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$

سرعت اولیه $\left| \begin{array}{l} v_{x_0} = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin \theta_0 \end{array} \right.$

جابجایی $\left| \begin{array}{l} x = v_0 \cos \theta_0 t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta_0 t + y_0 \end{array} \right.$

در بالاترین نقطه حرکت پرتابی $v_y = 0$ به شرط آنکه جسم به همان سطح برگردد.

$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$ زمان رسیدن تا نقطه اوج

$t = \frac{2 v_0 \sin \theta_0}{g}$ زمان پرواز

$y = \frac{-gx^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$ معادله حرکت

ارتفاع بیشینه $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$ برد $R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$

برد: به شرط آنکه پرتاب به همان سطح افقی باز گردد.

❋ محاسبه سرعت و زاویه آن نسبت به افق در هر لحظه

$\tan a = \frac{-gt + v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

مثال) زاویه پرتاب چقدر باشد تا بعد پرتاب با ارتفاع اوج برابر باشد.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$ و $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$ ، $H = R \Rightarrow \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{g}$

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \theta \cos \theta_0)}{g} \Rightarrow \frac{\sin \theta 0}{2} = 2 \cos \theta_0 \Rightarrow \sin \theta_0 = 4 \cos \theta_0$$

$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = 4 \Rightarrow \tan \theta_0 = 4 \Rightarrow \theta_0 = 76^0$$

مثال) جسمی تحت زاویه 60° و با سرعت اولیه $20\ {}^{m}\!/_{s}$ پرتاب می شود در این صورت محاسبه کنید.

الف) ارتفاع اوج

ب) برد پرتاب

ج) زمان رسیدن به نقطه اوج

د) زمان رسیدن همان سطح افقی

ه) در ارتفاع 5m به چه اندازه ای مسیر افقی طی کرده است.

الف) $v_0 = 20\ {}^{m}\!/_{s} \qquad \theta_0 = 60^\circ \qquad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$H = \frac{y_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{20^2 \times \sin^2 60}{2\times 10} = \frac{400 \times \left(\sqrt{{}^{3}\!/_{2}}\right)^2}{20} \Rightarrow H = 20 \times {}^{3}\!/_{4} = 15\,m$$

ب) $$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{20^2 \sin 2\times 60}{10} = \frac{400 \times \sin 120}{10} \Rightarrow R = 34\,m$$

ج) $$t = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{20\times \sin 60}{10} \Rightarrow t = 2\sqrt{{}^{3}\!/_{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}s$$

د) $$t = \frac{2v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{2\times 20 \sin 60^\circ}{10} = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 2\sqrt{3}s$$

ه) $$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos 2\theta_0} + x\tan\theta_0 \Rightarrow 5 = \frac{-10x^2}{2\times 20^2 \times \cos^2 60^\circ} + x\tan 60$$

$$5 = \frac{-10x^2}{800\times\left({}^{1}\!/_{2}\right)^2} + x\sqrt{3} \Rightarrow 5 = \frac{-x^2}{80\times {}^{1}\!/_{4}} + x\sqrt{3} \Rightarrow 5 = \frac{-x^2}{20} + \sqrt{3x}$$

$$100 = -x^2 + 20\sqrt{3x} \Rightarrow x^2 - 20\sqrt{3x} + 100 = 0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{20\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(-20\sqrt{3}\right)^2-4\times1\times100}}{2\times1}\Rightarrow x=\frac{20\sqrt{3}\pm\sqrt{1200-400}}{2}$$

$$=\frac{20\sqrt{3}\pm\sqrt{800}}{2}=\frac{20\sqrt{3}\pm20\sqrt{2}}{2}$$

$$x=10\sqrt{3}\pm10\sqrt{2}\qquad \left|\begin{array}{l} x=10\sqrt{3}+10\sqrt{2}=10\times1/7+10\times1/4=31m \\ x=10\sqrt{3}-10\sqrt{2}=10\times1/7-10\times1/4=3m \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x=31m \\ x=3 \end{array}\right.$$

مثال) هواپیمای بمب افکنی که تحت زاویه 53° نسبت به خط قائم شیرجه می رود بمبی را در ارتفاع 730m رها می کند بمب5s بعد از رها شدن به زمین می رسد.

الف) سرعت بمب افکن چقدر بوده است؟

ب) در این مدت بمب چه مسافتی را در راستای افقی طی کرده است؟

ج) مولف های افقی و قائم سرعت آن درست قبل از برخورد با زمین چقدر بوده است؟

نکته : اگر هواپیما در راستای افقی پرواز می کرد و تحت زاویه ای شیرجه نمی رفت در این صورت زاویه اولیه آن صفر بود اما در این مسئله تحت زاویه $\theta_0=53^0$ شیرجه رفته است پس است.

❄ سرعت بمب افکن همان سرعت اولیه بمب است :

الف) $$y=-\tfrac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta_0 t\Rightarrow 730=-\tfrac{1}{2}\times10\times5^2+v0\sin 53^0\times5$$

$$730=-125+v_0\times./8\times5\Rightarrow 730-125=4v_0\Rightarrow v_0=\frac{855}{4}=213/7\ m/s$$

سرعت بمب افکن

ب) $$x=v_0\cos\theta.t\Rightarrow x=213/7\times\cos53\times5=213/7\times0/6\times5=641/1m$$

ج) $$Vx=v\cos a=v_0\cos\theta, Vy=v\sin a=-gt+v_0\sin\theta_0\Rightarrow Vx=213/7\times\cos53=128$$

$$Vy=-10\times5+213/7\times\sin53=-50+213/7\times0/8=120/96$$

د) سرعت Vحین برخورد به زمین و زاویه برخورد به زمین را حساب کنید.

$$v\cos a = 128/22$$

$$v\sin a = 120/98 \qquad \tan a = \frac{120/98}{128/22}$$

$$v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(128/22)^2 + (120/98)^2}$$

مثال) توپی از زمین به هوا پرتاب شده است، سرعت آن در ارتفاع 9/1mاز

رابطه $\vec{v} = 7/6\vec{i} + 6/1\vec{j}\ {}^{m}\!/_{s}$ بدست می آید.

الف) این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ب) مسافت کل افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

ج) سرعت توپ از نظر بزرگی و جهت قبل از برخورد به زمین چقدر است؟

الف) در بالاترین ارتفاع v_{y_2} پس می توان نوشت :

$$V_x = 7/6 = V_0 x$$

$$V_y = 6/1, V_y = -gt + V_{0_y}$$

$$v_{y_2}^2 - v_{y_1}^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - (6/1)^2 = -2\times 10(H-y) - 37/21 = -20(H-9/1)$$

$$\Rightarrow \frac{37/21}{20} = H - 9/1$$

$$\Rightarrow H = 10/96\,m$$

ب)

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\theta 0}{2g} \Rightarrow H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{20} \Rightarrow v_0^2\sin^2\theta 0 = 220 \Rightarrow v_0\sin\theta_0 = \sqrt{220}$$

$$v_x = v_0\cos\theta_0 - 7/6 \Rightarrow v_0\cos\theta_0 7/6$$

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta 0}{g} = \frac{2(v_0\sin\theta_0).(v_0\cos\theta_0)}{g} = \frac{2\times\sqrt{220}\times 7/6}{20} = \frac{2\times 14/8\times 7/6}{10} = 22/5$$

$$R = \frac{v_0^2\sin 2\theta 0}{g} = \frac{2v_0^2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$$

$$V_{y_3}^2 - V_{y_1}^2 = -2g(y_3 - y_1) \Rightarrow V_{y_3}^2 - (6/1)^2 = -2\times 10(0 - 9/1), V_{y_3}^2 - V_{y_1}^2 = -2g(y_3 - y_1)$$

$$V_{y_3}^2 - 37/21 = 20\times 9/1 = 182$$

$$V_{y_3}^2 = 182 + 37/21 = 219/21 \qquad V_{y_3} = \sqrt{219/21} = 14/8$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(7/6)^2 + (14/8)^2} = \sqrt{57/76 + 219/21}$$

$$V = \sqrt{276/97} = 16/6 \Rightarrow V = 16/6 \, {}^{m}\!/_{s}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{14/8}{7/6} = 1/94 \Rightarrow \tan\theta = 1/94 \Rightarrow \theta = 62/8$$

د) سرعت اولیه و زاویه اولیه هنگام پرتاب را حساب کنید؟

$$\left| \begin{array}{l} v_0 \sin\theta_0 = \sqrt{220} = 14/8 \\ v_0 \cos\theta_0 = 7/6 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0} = \frac{14/8}{7/6} = 1/94 \Rightarrow \theta_0 = 62/8$$

$$v_0 \sin\theta_0 = 14/8 \Rightarrow v_0 \sin 62/8 = 14/8$$

$$v_0 \times 0/88 = 14/8 \Rightarrow v_0 = \frac{14/8}{0/88} = 16/6 \Rightarrow v_0 = 16/6 \, {}^{m}\!/_{s}$$

مثال) شخصی به توپی که در ارتفاع 1/2m بالاتر از زمین قرار دارد طوری ضربه می زند که زاویه پرتاب آن 45^0 و سرعت اولیه آن $33 \, {}^{m}\!/_{s}$ باشد توپ به جایی می رسد که در آنجا حصاری به ارتفاع 7/2m قرار دارد و فاصله آن از محل پرتاب 98m است آیا توپ از روی حصار خواهد گذشت؟

در فاصله 98m مقدار y را محاسبه می کنیم اگر از 7/2 متر بیشتر شد پس توپ از حصار خواهد گذشت اما اگر کمتر شد توپ به حصار برخورد می کند.

$$v_0 = 1/2 \qquad v_0 = 33 \;{}_y\, x = 98 \qquad \theta = 45^\circ \qquad y = ?$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} + x\tan\theta_0 + y_0 \Rightarrow v = -\frac{10 \times (98)^2}{2(33)^2 \times \cos^2 45} + 98 \times \tan 45 + 1/2 = 11/01 > 7/2$$

توپ از حصار رد می شود.

تعریف حرکت دایره ای یکنواخت:

به حرکتی که با سرعت ثابت بر مسیر دایره ای انجام می شود حرکت دایره ای یکنواخت گویند.

تعریف مکان زاویه :

در حرکت دایره ای کمانی را که متحرک تحت زاویه خاصی می پیماید مکان زاویه ای گویند و آن را با حرف θ نشان داده و یکای آن رادیان است.

تعریف سرعت زاویه ای متوسط :

به نسبت تغییرات مکان زاویه ای بر زمان طی شده سرعت زاویه ای متوسط گویند.

رابطه سرعت زاویه ای متوسط

$$\varpi = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$

در این رابطه ϖ علامت سرعت زاویه ای متوسط و یکای آن رادیان بر ثانیه است. و θ_2 , θ_1 مکان زاویه ای اولیه و ثانویه است یکای آنها رادیان است و Δt علامت زمان بوده و یکای آن ثانیه است.

تعریف سرعت زاویه ای لحظه ای :

به حد سرعت زاویه ای متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک سرعت زاویه ای لحظه ای گویند.

رابطه سرعت زاویه ای لحظه ای $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$\omega = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}}\ \varpi = \underset{\Delta t \to 0}{\text{حد}}\ \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

رابطه حرکت دایره ای یکنواخت :

در حرکت دایره ای یکنواخت سرعت زاویه ای ثابت بوده پس سرعت زاویه ای متوسط با سرعت زاویه ای لحظه ای برابر است و اگز متحرک در زمان صفر در مکان زاویه θ_0 و در لحظه t در مکان زاویه ای θ باشد در این صورت می توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}\varpi &= \frac{\theta-\theta_0}{t-0}\\ \varpi &= \omega\end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{\theta-\theta_0}{t} \Rightarrow \omega t = \theta-\theta_0 \Rightarrow \theta-\theta_0 = \omega t \Rightarrow \theta = \omega t+\theta_0$$

$$\theta = \omega t+\theta_0$$

مثال) متحرکی در زمان شروع حرکت در مکان زاویه ای $\frac{\pi}{6}$ رادیان قرار دارد در صورتی که سرعت زاویه ای آن برابر $\pi/4$ رادیان بر ثانیه باشد. محاسبه کنید پس از 1/5s مکان زاویه ای آن کجا خواهد بود.

$$\theta_0 = \pi/6\,(rad) \qquad \theta = \omega\times t+\theta_0 \qquad \theta = \omega t+\theta_0$$

$$\omega = \pi/4\,(rad/s) \qquad \theta = \pi/4\times 1/5+\pi/4 = \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{6} = \frac{9\pi+4\pi}{24} \Rightarrow \theta = \frac{13\pi}{24}rad$$

$$t = 1/5(s)$$

$$\theta = ?$$

مثال) معادله مکان زاویه ای یک متحرک بصورت $\theta = 3t^2-2t+1$ است در این صورت محاسبه کنید:

الف) سرعت زاویه متوسط در فاصله زمانی $t_1 = 1s$ تا $t_2 = 3s$

ب) سرعت زاویه ای لحظه ای در $t = 4s$

الف)

$$t_1 = 1(s) \qquad \theta_1 = 3\times 1^2-2\times 1+1 = 2(rad)$$

$$\omega = \frac{\theta_2-\theta_1}{t_2-t_1}$$

$$t_2 = 3(s) \qquad \theta_2 = 3\times 3^2-2\times 3+1 = 22(rad)$$

$$\varpi = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{22 - 2}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10 \Rightarrow \varpi = 10\left({}^{rad}\!/_{s}\right)$$

ب)

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 3 \times 2t - 2 = 6t - 2$$

$$\omega = 6t - 2 \Rightarrow \omega = 6 \times 4 - 2 = 22\left({}^{rad}\!/_{s}\right) t = 4s$$

نکته : شتاب یا بدلیل تغییر سرعت و یا به دلیل تغییر جهت سرعت بوجود می آید و در حرکت دایره ای یکنواخت که سرعت ثابت است بدلیل تغییر جهت سرعت شتابی بدست می آید که جهت آن به سمت مرکز دایره است و به آن شتاب مرکزی گرا گویند.

سوال) شتاب مرکزی گرا را با استفاده از شکل و روابط لازم در حرکت دایره ای یکنواخت بدست آورید؟

اگر متحرک از مکان زاویه ای θ_2 تا θ_1 مکان بسیار کوچکی را طی کند در این صورت کمان طی شده با جابجایی طی شده تقریباً یکسان است و می توان نوشت :

$$r_1 = r_2 = r$$

$$v_1 = v_2 = v$$

با توجه به شکل ۱ و ۲ چون این دو مثلث متشابهند می توان نوشت:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r}\Delta r$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{v}{r}\Delta r}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}.v = \frac{v^2}{r} \Rightarrow a = \frac{v^2}{r}$$

نیروی مرکزی گرا نیروی جانب مرکز $\begin{matrix} F = ma \\ a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow F = \frac{mv^2}{r} \end{matrix}$ قانون دوم نیوتون

مثال) متحرک با سرعت $20\,{}^{m}\!/_{s}$ یک مسیر دایره ای که شعاعش 4m است می پیماید در این صورت شتاب مرکز گرای آن را بدست آورید.

$v = 20\,{}^{m}\!/_{s}$

$v = 4m \qquad a = \frac{v^2}{v} \Rightarrow a = \frac{20^2}{4} = \frac{400}{4} = 100$

$a = ? \qquad a = 100\left({}^{m}\!/_{s^2}\right)$

مثال) اتومبیلی با سرعت ثابت $10\,{}^{m}\!/_{s}$ مسیری دایره ای را می پیماید و درمدت 4s مطابق شکل ربع دایره را طی می کند در این صورت شتاب آن را محاسبه کنید.

$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t} \Rightarrow |a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{14}{4} \Rightarrow |a| = 3/5\,{}^{m}\!/_{s^2}$

$\Delta t = 4s \qquad |\Delta v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} = 14$

$v_1 = v_2 = 10\,{}^{m}\!/_{s}$

اگر با سرعت ثابت V=10 نصف دایره را طی کرد

$v_2 - v_1 = -10 - 10 = -20 \qquad |\Delta v| = |-20| = 20$

سرعت نسبی :

اگر متحرکی در یک دستگاه مرجع متحرک که سرعت ثابت دارد ، با سرعت ثابت حرکت کند در این صورت می توان سرعت نسبی آنرا نسبت به دستگاه مرجع ثابت و ساکن به دست آورد.

د) اگر تحت زاویه θ نسبت به هم حرکت کند

$v' = \sqrt{v_1^2 + v_1^2 + 2v_1v_2\cos\theta}\ ?$

مثال) اتومبیلی با سرعت $10\ {}^{m}/_{s}$ نسبت به زمین در حال حرکت است و در برابر آن باد با سرعت $5\ {}^{m}/_{s}$ و تحت زاویه 60^{0} نسبت به زمین می وزد در این صورت سرعت متحرک نسبت به زمین به چه مقدار خواهد بود.

مسئله را به گونه ای حل می کنیم که اتومبیل درون متحرک باد در حال حرکت است

ب) اگر باد هم جهت حرکت اتومبیل حرکت کند

الف) $v' = \sqrt{10^{2} + 5^{2} + 2 \times 10 \times 5 \cos 60}$

$$v = \sqrt{u^{2} + v^{2} + 2uv \cos \theta} =$$

$$\sqrt{10^{2} + 5^{2} + 2 \times 10 \times 5 \cos 120} = \sqrt{75} = 8/6\ {}^{m}/_{s}$$

قوانین حرکت

قانون اول نیوتون: اگر جسمی در حال سکون باشد یا با سرعت ثابت در حال حرکت باشد در این صورت جسم تمایل دارد حالت قبل خود را حفظ کند مگر در حالتی که بر آن نیرویی وارد شود.

قانون دوم نیوتن: اگر بر جسمی نیرو وارد شود آن جسم شتابی پیدامی کند که هم جهت با نیرو و متناسب با بزرگی نیرو است و این شتاب با بزرگی جرم جسم نسبت معکوس دارد.

قانون سوم نیوتن : هر عملی را عکس العملی است خلاف جهت و هم اندازه با آن اگر جسم اول بر جسم دوم نیرویی وارد کند جسم دوم هم نیرویی هم اندازه و بر خلاف جهت بر جسم اول وارد می کند.

سؤال) حرکت موشکی به سمت بالا را بر اساس قوانین نیوتون توجیه کنید؟ گاز و سوخت های درون موشک به دلیل آنکه موشک به آنها نیرویی به سمت پایین وارد می کند خارج می شود آنگاه این گازها نیرویی هم اندازه و بر خلاف جهت به سمت بالا بر موشک وارد می کند (قانون سوم نیوتون) اکنون موشک نیروی به سمت بالا وارد شده پس طبق قانون دوم نیوتون شتابی به سمت بالا پیدا کرده و به سمت بالا حرکت می کند.

مثال) چرا هنگام دور زدن دور یک فلکه به یک سمت پرت می شویم؟ طبق قانون اول نیوتون شخص تمایل داشت با سرعت ثابت در مسیر مستقیم حرکت کند اما اتومبیل به یکباره تغییر جهت داد و شخص هنوز می خواهد در مسیر مستقیم برود پس به یک سمت پرت می شود.

اینرسی:

مخالفت جسم در مقابل جسم و تغییر حالتی که در آن ایجاد می شود را همان اینرسی گویند.

چرا هنگامی که اتومبیل از حالت سکون در می آید سرنشینان آن به سمت عقب پرت می شوند؟

در ابتدا سرنشینان درون اتومبیل ساکن هستند و هنگامی که اتومبیل به حرکت در می آید نیرویی به یکباره بر سرنشینان وارد می کند لذا به دلیل اینرسی، سرنشینان با این تغییر حالت مخالفت کرده و طبق قانون اول نیوتون تمایل دارند حالت سکون خود را حفظ کنند. لذا سر جای خود باقی مانده و به صندلی اتومبیل که جلو می رود برخورد می کند. لذا به نظر می رسد که به عقب پرت می شود.

تعریف اصطکاک ایستایی :

به مقدار نیرویی که از طرف سطح زیرین به جسم وارد شده و مانع حرکت جسم شده و آن را در حالت سکون نگه می دارد.

تعریف اصطکاک جنبشی :

به نیروی که در حین حرکت جسم از طرف سطح زیرن بر جسم وارد می شود و حین حرکت مانع حرکت آن می شود.

رابطه نیروی اصطکاک جنبشی :

$$f_k = \mu_k N$$

در این رابطه F_k علامت نیروی اصطکاک جنبشی بوده و یکای آن Nاست.

و μ_k علامت ضریب اصطکاک جنبشی بوده و بدون یکا است. وNعلامت نیروی عمودی تکیه گاه بوده و یکای آن N (نیوتن) است.

در حالت کلی هر جسم F_k کوچکتر ازF_{smax} می باشد برای هر جسم زیرا در حالتی که جسم ساکن است بین سطوح جسم با سطح زیرین جوش خوردگی هایی وجود دارد لذا نیروی بیشتری لازم است تا علاوه بر اصطکاک این جوش خوردگی ها را هم بکشند.

با توجه به اینکه $f_{s\max}$ بزرگتر از f_k است لذا برای هر جسم μs هم بزرگتر از μkاست.

$$f_{s\max} \rangle f_k \Rightarrow \mu_s N \rangle \mu_k N \Rightarrow \mu_s \rangle \mu_k$$

* نکات زیر باید در مورد حل مسائل دینامیک رعایت شود:

۱- در ابتدا شکلی از جسم و تکیه گاه آن را رسم کنید.

۲- هر جسم را بصورت مجزا رسم کرده و نیروهای آن را در شکل مشخص کنید.

۳- برای هر شکل در راستای حرکت جسم و عمود بر آن نیروها را تجزیه کرده . ر.ابط نیرو را در هر راستا مشخص کنید.

۴- با توجه به رابطه $f_k = \mu_k N$ نیروی عمودی تکیه گاه بدست آمده را در این رابطه جایگزین کرده و در هر رابطه ای که f_k قرار دارد مقدار بدست آمده را جایگزین می کنیم.

۵- روابط بدست آمده برای هر دو شکل را ترکیب کرده تا شتاب حرکت دو جسم بدست آید.

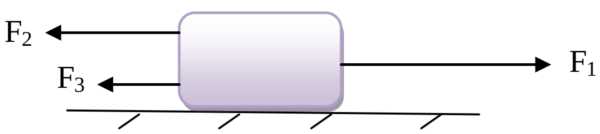
مثال:

بر جسمی به جرم 5kg که بر یک سطح افقی بدون اصطکاک است نیرویی به اندازه 20N در جهت افقی وارد می شود در این صورت شتابی که این جسم پیدا می کند را بدست آورید؟

$$F = ma \Rightarrow 20 = 5a = a = \frac{20}{5} = 4\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

مثال :

در شکل روبرو برآیند نیروهای وارد بر جسم را بدست آورید و اگر جرم جسم ۲/۵ کیلوگرم باشد شتاب آن را بدست آورید؟(اصطکاک ناچیز)



$$F = F_1 - F_2 - F_3$$

$$F = 20 - 10 - 5 = 20 - 15 = 5(N)$$

$$F = 5(N)$$

$$F = ma \Rightarrow 5 = 2/5a$$

$$a = \frac{5}{2/5} = 2\, {}^{m}\!/_{s^2}$$

نکته :

* رابطه برآیند نیروها مساوی با ma ، همیشه در یک راستا برقرار است.

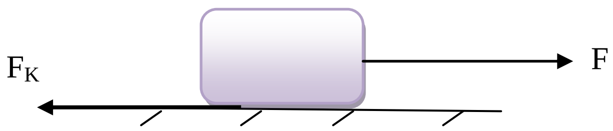
* در محاسبه برآیند نیروها، نیروهایی که در جهت حرکت هستند را مثبت و نیروهایی که خلاف جهت حرکت هستند را منفی می گیریم.

مثال :

برجسمی نیروی 30N وارد شده و نیروی اصطکاک 10Nدر مقابل حرکت آن وجود دارد. اگر جرم جسمkg باشد.

الف) شکل نیروهای آن را رسم کنید؟

ب) شتاب حرکت آن را بدست آورید؟



ب) برآیند نیروها $\left.\begin{array}{l} = ma \\ = F - f_k \end{array}\right\} F - f_k = ma$

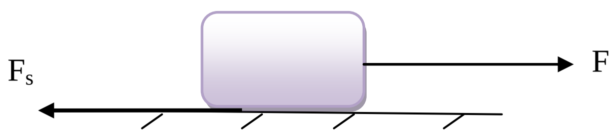
برآیند نیروها

$$F - f_k = ma \Rightarrow ۳۰ - ۱۰ = ۵a$$

$$۲۰ = ۵a \Rightarrow a = \frac{۲۰}{۵} = ۴\,\frac{m}{s^{۲}}$$

مثال : نشان دهید که اگر بر جسمی نیروی F وارد شود و آن جسم حرکت نکند نیروی اصطکاک ایستایی برابر با نیروی وارد شده بر آن جسم است.

$$F - f_s = ma \Rightarrow a=0 \Rightarrow f=f_s$$



نکته : اگر آنقدر به جسم نیرو وارد شد تا جسم در آستانه حرکت قرار گیرد (یعنی ذره ای دیگر نیرو باعث حرکت جسم شود) در این صورت نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است و آن را با علامت F_{smax} نشان می دهیم. و رابطه آن = $f_{smax} = \mu_s N$

که در این رابطه Fsmax بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بوده و یکای آن نیوتن است. و μ_sضریب اصطکاک ایستایی بوده و بدون یکا است و N نیروی عمودی تکیه گاه است.

مثال)

جسمی به جرم m بر روی یک سطح افقی قرار دارد و با نیروی افقی Fبر روی سطح افقی کشیده می شود دراین صورت:

الف) رابطهٔ نیروی عمودی تکیه گاه را بدست آورید؟

ب) اگر ضریب اصطکاک جنبشی در برابر μ_kباشد شتاب حرکت را بدست آورید؟

در راستای عمود

برآیند نیروها $= ma$

ساکن $a = 0$

برآیند نیرو $= N - mg$

$$\Rightarrow N - mg = m\alpha \Rightarrow N - mg = 0$$

$$N = mg$$

نکته :

اگر جسم همیشه روی سطح افقی حرکت کرد و نیروهای افقی به آن وارد شود و زیر آن تکیه گاه بود در این صورت: $N = mg$

در راستای افق

برآیند نیروها $= ma$

$$\rightarrow F - f_k = ma$$

برآیند نیروها $= F - f_k$

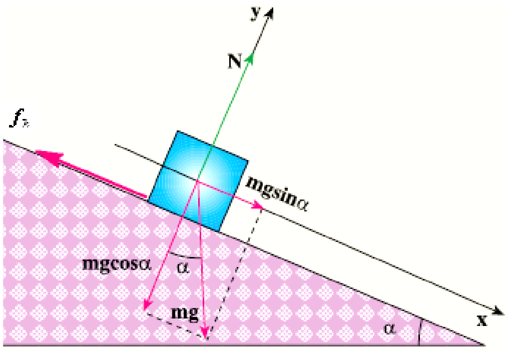
$$\left.\begin{array}{l} f_k = \mu_k N \\ N = mg \end{array}\right\} \Rightarrow f_k = \mu_k mg$$

$$\rightarrow F - \mu_k mg = ma \Rightarrow a = \frac{F - \mu_k mg}{m}$$

مثال: جسمی به جرم m بر روی یک سطح شیبدار با زاویه θ قرار دارد در این صورت اگر با شتاب a به سمت پایین حرکت کند و ضریب اصطکاک جنبشی μ_k باشد در این صورت:

الف) شکلی از نیروهای آن رسم کنید؟

ب) شتاب حرکتی را بدست آورید؟



برآیند نیروها $= ma$

عمود بر سطح شیب دار | در راستای قائم ساکن $a = 0$

برآیند نیروها $= N - mg \cos\theta$

$$\rightarrow N - mg\cos\theta = ma \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0$$

$$N = mg\cos\theta$$

برآیند نیروهای روی سطح شیبدار $= ma$

برآیند نیروها $= mg\sin\theta - f_k$

$$\rightarrow mg\sin\theta - F_k = ma \rightarrow mg\sin\theta - \mu_k N = ma$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta = ma \\ \Rightarrow g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta = a \end{array}\right\}$$

نکته:

* جسم هنگامی روی سطح شیب دار شتابش صفر است که یا ساکن باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند.

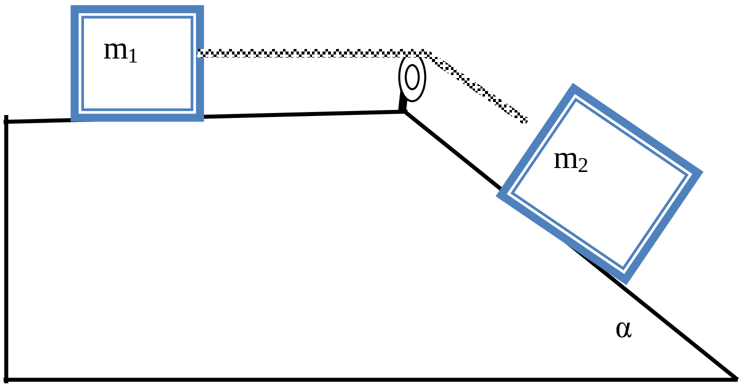
مثال :

مطابق شکل روبرو جسم m_2 بر روی سطح شیب داری با زاویه α قرار دارد و توسط نخی به جسم m_1 که روی سطح افقی است وصل است. اگر جسم m_2 به سمت پایین حرکت کند و شتاب a داشته باشد. در این صورت :

الف) شتاب حرکت این دو جسم را بدست آورید؟

ب) کشش ریسمان یا نخ چقدر است؟

(فرض کنید ضریب اصطکاک جنبشی در جسم با سطح μ_k است).



الف)

روی سطح افق

بر آیند نیروها $= ma$

برآیند نیروها $= T - F_1 k$

عمود بر سطح افق

بر آیند نیروها $= ma$

در راستای قائم $= a = 0$

برآیند نیروها $= N_1 - m_1 g$

$$\Rightarrow N_1 - m_1 g = m_1 a = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T - F_1 k = m_1 a \\ F_1 k = \mu_k N_1 \\ \left. N_1 = m_1 g \right\} \Rightarrow F_1 k = \mu_k m_1 g \;\; \Big\} \Rightarrow T - \mu_k m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

معادله 1

عمود بر سطح شیبدار

برآیند نیروها $= m_2 a$

$$\left. a = 0 \right\} \Rightarrow N_2 - m_2 g \cos\alpha = m_2 a = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g \cos\alpha$$

برآیند نیروها $= N_2 - m_2 g \cos\alpha$

روی سطح شیبدار $\Rightarrow$ برآیند نیروها $= m_2 a$

بر آیند نیروها $= m_2 g \sin\alpha - F_{2k} - T$

$$\Rightarrow m_2 g \sin\alpha - f_{2k} - T = m_2 a$$

$$\left.\begin{array}{r} F_{2}k = \mu_k N_{2} \\ N_{2} = m_{2} g\cos\alpha \end{array}\right\} f_{2}k = \mu_k m_{2} g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow m_{2} g\sin\alpha - \mu_k m_{2} g\cos\alpha - T = m_{2} a$$ معادله2

$$\begin{cases} T - \mu_k m_{1} g = m_{1} a & \text{معادله1} \\ m_{2} g\sin\alpha - \mu_k m_{2} g\cos\alpha - T = m_{2} a & \text{معادله2} \end{cases}$$

$$m_{2} g\sin\alpha - \mu_k m_{2} g\cos\alpha - \mu_k m_{1} g = m_{2} a + m_{1} a$$

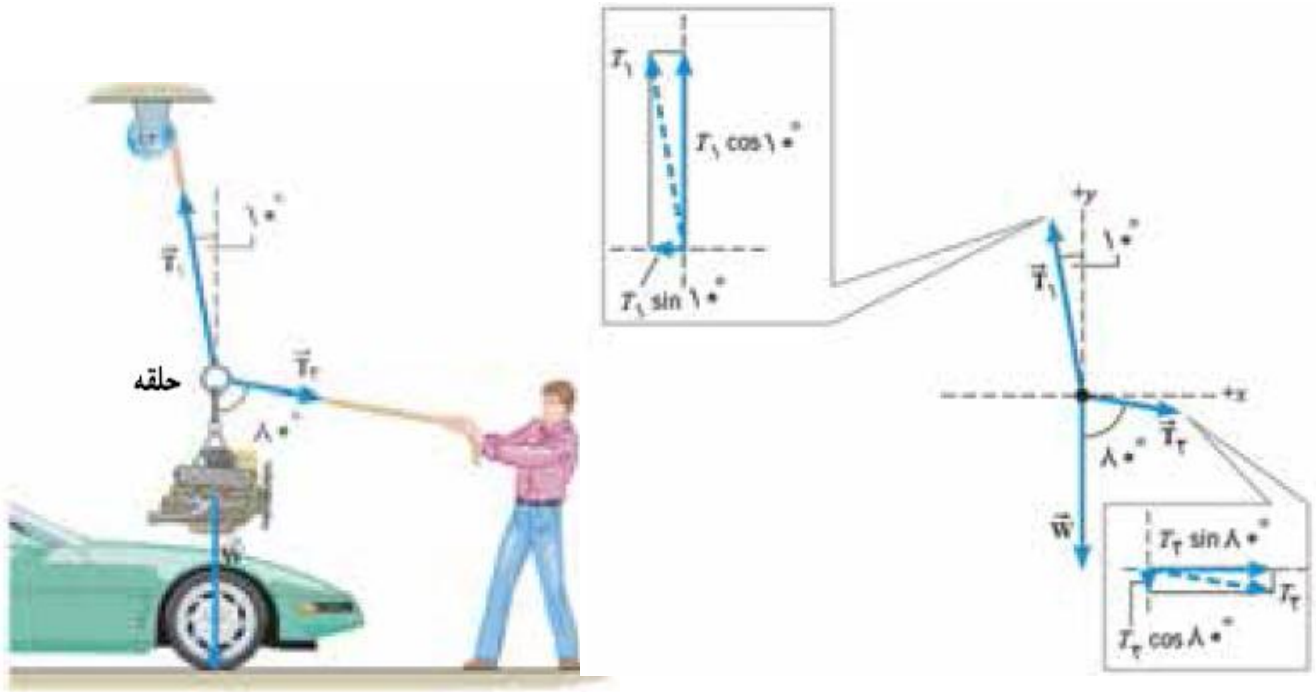
$$g\left(m_{2}\sin\alpha - \mu_k m_{2}\cos\alpha - \mu_k m_{1}\right) = \left(m_{1} + m_{2}\right)a \Rightarrow$$

$$a = \frac{g\left(m_{2}\sin\alpha - \mu_k m_{2}\cos\alpha - \mu_k m_{1}\right)}{m_{1} + m_{2}}$$

برای محاسبه کشش ریسمان شتاب محاسبه شده فوق را در یکی از معادلات ۱ یا ۲ جاگذاری نمایید و رابطه ای برای کشش ریسمان (T) بدست آورید.

مثال:

در شکل وزن موتور $W=۳۱۵۰N$ و کل سامانه در حال تعادل است. بزرگی نیروهای کشش $T_۱$ و $T_۲$ چقدر است؟



موتور اتومبیل به صورت
یک ذره فرض شده و نمودار نیروهای وارد بر آن رسم
شده است.

در امتداد محور x داریم :

$$-T_۱\sin ۱۰^\circ + T_۲ \sin ۸۰^\circ = ۰$$

و در امتداد محور y داریم :

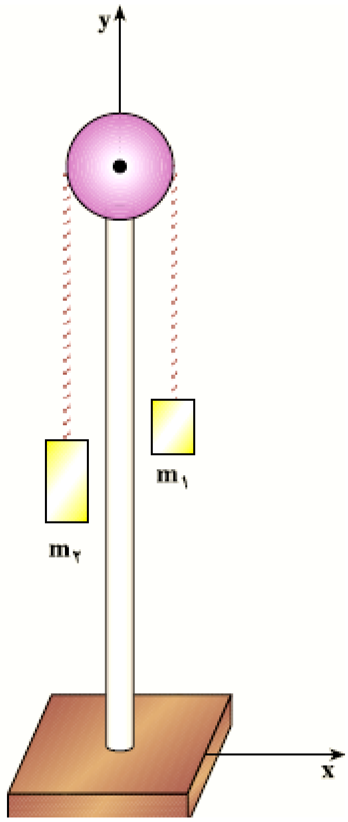
$$T_۱\cos ۱۰^\circ - T_۲\cos ۸۰^\circ - W = ۰$$

از حل این معادله‌ها داریم :

$$T_۲= ۵۸۲\ N\ , T_۱=۳/۳ \times ۱۰^۳ N$$

.

مثال :

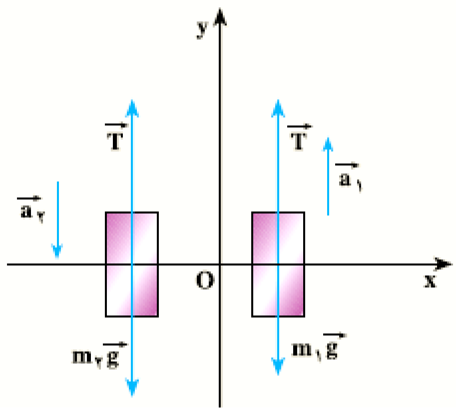


قرقره‌ای را مطابق شکل بر روی پایه‌ای نصب می‌کنیم. دو وزنهٔ $m_1=100g$ و $m_2=150g$ را با نخی سبک به یکدیگر وصل می‌کنیم و نخ را از شیار قرقره می‌گذرانیم. شتاب حرکت وزنه‌ها و نیروی کشش نخ را محاسبه کنید. این وسیله را **ماشین اتوود** می‌نامند.

نیروهای وارد بر جرم‌های m_1 و m_2 رسم شده است. چون جرم نخ، قرقره و نیروی اصطکاک ناچیز است، کشش طناب در تمام نقطه‌های آن یکسان است؛ بنابراین، $T_1=T_2$ و چون $m_2>m_1$ است، m_2 به‌طرف پایین و m_1 به‌طرف بالا حرکت می‌کند. در این‌صورت، شتاب حرکت m_2 در خلاف جهت محور y و m_1 در جهت محور y خواهد بود؛ پس :

$$T-m_1g=m_1a_1 \quad (۱)$$

$$T-m_2g=-m_2a_2 \quad (۲)$$



چون بزرگی جابه‌جایی وزنه‌ها یکسان است : $a_1=-a_2=a$

با جایگزینی مقادیر m_1 و m_2 در رابطه‌های (۱) و (۲) خواهیم داشت :

$$T-۰/۱\times ۱۰=+۰/۱a$$

$$T-۰/۱۵\times ۱۰=-۰/۱۵a$$

با حلّ این معادله‌ها داریم :

$a=۲m/s^۲$ و $T=۱/۲N$

تعریف گشتاور نیرو :

به حاصل ضرب نیرو در بازوی نیرو برای جسمی که حول یک محور می چرخد را گشتاور نیرو گویند.

مثال :مطابق شکل روبرو و اگر به میله ای به طول a نیروی F وارد شود در این صورت به آن گشتاوری وارد می شود که بزرگی گشتاور از رابطه $T = Fr \sin \theta$ بدست می آید و اگر F عمود بر r باشد گشتاور از رابطه $T = Fr$ بدست می آید.

در این روابط Tعلامت گشتاور بوده و یکای آن N.m است.

وF علامت نیرو بوده و یکای آنN است.

r علامت فاصله یا بازوی نیرو بوده و یکای آن m است.

نکته :

❈ تعادل گشتاور نیرو : در برخی موارد محور حرکت در وسط یک جسم بوده و از هر دو طرف محور (شبیه آلاکلنگ) نیرو وارد می شود. به گونه ای که گشتاور نیرویی که از هر دو طرف وارد می شود برابر است.

در این موارد می توان نوشت :

گشتاورهای چپگرد (پاد ساعتگرد) = گشتاورهای راست گرد (ساعت گرد)

مثال : دو کارگر یک درخت را بریده و می خواهند با آن آلاکلنگی درست کنند. وزن یکی از آنها 80kg و وزن دیگری 60kg است اگر شخص 80kg به فاصله دو متری از محور چرخش بنشیند در این صورت شخص 60kg در چه فاصله ای از محور بنشیند تا تعادل بین هر دو برقرار شود؟

گشتاور پاد ساعت گرد = گشتاور ساعت گرد

$$F_2 r_2 = F_1 r_1 \qquad m_1 = 80\,kg$$

$$m_2 g r_2 = m_1 g r_1 \qquad m_2 = 60\,kg$$

$$m_2 r_2 = m_1 r_1 \qquad r_1 = 2\,m$$

$$60 \times r_2 = 80 \times 2 \qquad r_2 = ?$$

$$r_2 = \frac{80 \times 2}{60} = \frac{160}{60} = 2/67\,(m) \Rightarrow r_2 - 2/67\,m$$

خورشیدوند

دانشکده فنی پسران

دورود