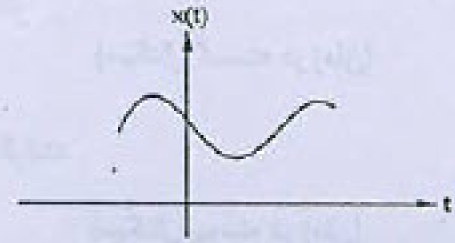
۱ـ سیگنال‌ها

۱ـ۱ـ سیگنال‌ها و خواص آن‌ها

تعریف سیگنال: تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است و حاوی اطلاعات می‌باشد.

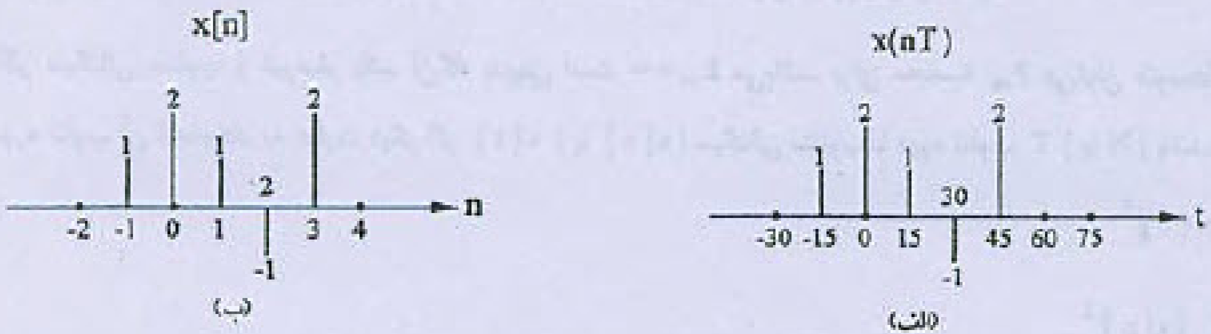
تقسیم‌بندی سیگنال‌ها: برای سیگنال‌ها با توجه به خواص مورد‌نظر می‌توان تقسیم‌بندی‌های مختلفی به شرح زیر انجام داد.

الف ـ سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) پیوسته در زمان (۲) گسسته در زمان تقسیم‌بندی کرد. در سیگنال‌های پیوسته در زمان، متغیر مستقل پیوسته است و این سیگنال‌ها برای تمام مقادیر پیوسته‌ای که متغیر مستقل می‌تواند به خود بگیرد، تعریف می‌شوند. برای مشخص کردن این دسته از سیگنال‌ها متغیر مستقل را درون پرانتز قرار می‌دهیم. به عنوان مثال سیگنال $x(t)$ در شکل (۱ـ۱) نشان داده شده است:



شکل ۱ـ۱ـ نمونه‌ای از یک سیگنال پیوسته در زمان

سیگنال‌های گسسته در زمان تنها در زمان‌های گسسته تعریف شده‌اند و در نتیجه برای این سیگنال‌ها متغیر مستقل تنها مقادیر گسسته‌ای به خود می‌گیرد. بدیهی است که این سیگنال‌ها با نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته در زمان بدست می‌آیند. به عنوان مثال در شکل (۱ ـ ۲ ـ الف) سیگنال نمونه‌برداری شده $x(nT)$ یک سیگنال گسسته در زمان است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود سیگنال فوق دارای نمونه‌هائی با فاصله $T=15$ از یکدیگر است. به منظور آن‌که فاصله نمونه‌برداری در محاسبات سیگنال‌های گسسته در زمان تاثیر نداشته باشد، معمولاً متغیر مستقل آن‌ها را شماره نمونه‌ها انتخاب می‌کنند و شماره نمونه‌ها را درون کروشه قرار می‌دهند تا ماهیت گسسته بودن سیگنال نیز مشخص گردد. در شکل (۱ـ۲ـ ب) سیگنال گسسته $x[n]$ استخراج شده از روی $x(nT)$ شکل (۱ ـ ۲ ـ الف) نشان داده شده است. بدیهی است n فقط می‌تواند مقادیر صحیح داشته باشد.



شکل ۱ـ۲ـ (الف) سیگنال نمونه‌برداری شده از یک سیگنال پیوسته در زمان (ب) سیگنال گسسته در زمان بر حسب شماره نمونه

ب ـ سیگنال‌ها را می‌توان به سه دسته (۱) سیگنال توان (۲) سیگنال انرژی (۳) سیگنال غیرتوان و انرژی تقسیم‌بندی کرد. برای درک بهتر این سه نوع سیگنال ابتدا به تعریف انرژی کل (E_∞) و توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود (P_∞) برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته در زمان می‌پردازیم.

انرژی کل (E_∞) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt = \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|^2$$ (سیگنال گسسته در زمان)

توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود (P_∞) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2\,dt$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}|x[n]|^2$$ (سیگنال گسسته در زمان)

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T}$$ (سیگنال پیوسته در زمان)

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty}\frac{E_\infty}{2N+1}$$ (سیگنال گسسته در زمان)

با توجه به تعاریف فوق سه نوع سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

سیگنال توان سیگنالی است که توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن در رابطه $0 < P_\infty < \infty$ صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی $E_\infty = \infty$ می‌شود.

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی کل آن در رابطه $0 < E_\infty < \infty$ صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی $P_\infty = 0$ می‌شود.

سیگنال غیر توان و انرژی سیگنالی است که در آن $P_\infty = E_\infty = \infty$ می‌باشد.

در شکل (۱ـ۳) سه نمونه از این سه نوع سیگنال نشان داده شده‌اند.

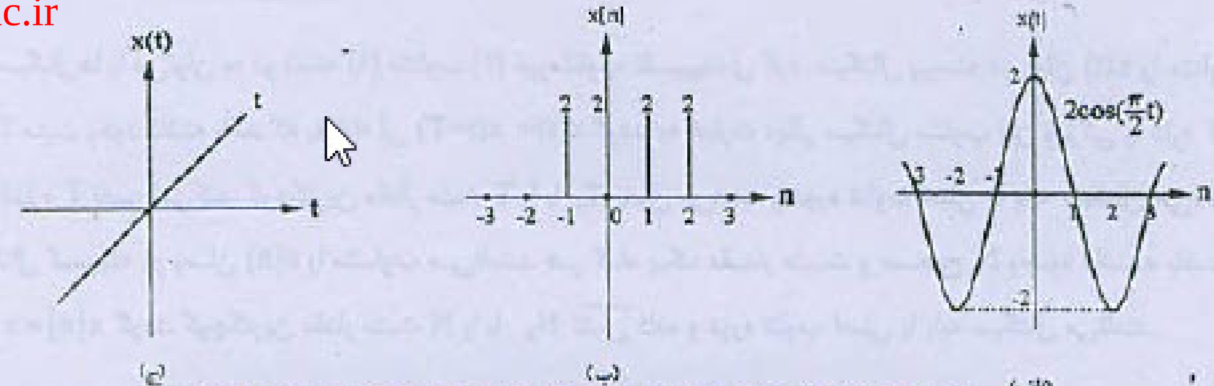
تذکر: با توجه به تعاریف P_∞ و E_∞ می‌توان نتیجه گرفت که سیگنال توأماً توان و انرژی وجود ندارد.

تذکر: اگر سیگنالی متناوب و غیرصفر باشد آن‌گاه بدیهی است $E_\infty = \infty$ می‌باشد. برای محاسبه P_∞ می‌توان متوسط‌گیری را روی یک دوره تناوب آن انجام داد. به عبارت دیگر اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) سیگنالی متناوب با دوره تناوب T (یا N) باشد، آن‌گاه:

$$P_\infty = P = \frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2$$

$$P_\infty = P = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle}|x[n]|^2$$

در نتیجه سیگنال متناوب نمی‌تواند یک سیگنال انرژی باشد و سیگنال فوق سیگنال توان یا سیگنال غیرتوان و انرژی است.



شکل ۳-۳ـ (الف) سیگنال توان (ب) سیگنال انرژی (ج) سیگنال غیر توان و انرژی

تست نمونه ـ (آزاد ۷۹) قدرت سیگنال زیر چقدر است؟

$$h(t)=\begin{cases}2 & t<-10\\ 4 & -10<t\le 10\\ 6 & 10\le t\end{cases}$$

۱) 20 ۲) 4 ۳) 3 ۴) 18.66

حل :

$$P_{\infty}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|x(t)|^2dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left(\int_{-T}^{-10}4dt+\int_{-10}^{10}16dt+\int_{10}^{T}36dt\right)$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{4(-10+T)+16(10+10)+36(T-10)}{2T}=\lim_{T\to\infty}\frac{40T+K}{2T}=20$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه ـ در مورد سیگنال‌های $x_1(t)=e^{-t}u(t)$ ، $x_2(t)=\cos(2t)$ کدام گزینه صحیح است؟

۱) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال توان است و انرژی $x_2(t)$ محدود می‌باشد.

۲) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال انرژی است و انرژی $x_2(t)$ بی‌نهایت می‌باشد.

۳) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال توان است و انرژی $x_2(t)$ بی‌نهایت می‌باشد.

۴) سیگنال $x_1(t)$ سیگنال انرژی است و انرژی $x_2(t)$ محدود می‌باشد.

حل :

$$E_{x_1}=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_1(t)|^2dt=\int_{0}^{+\infty}e^{-2t}dt=\frac{e^{-2t}}{-2}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

$$E_{x_2}=\int_{-\infty}^{+\infty}|x_2(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos^2(2t)dt=\infty$$

پس $x_1(t)$ سیگنال انرژی و $x_2(t)$ سیگنال توان است.

پس گزینه (۲) صحیح است.

ج ـ سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) متناوب (۲) غیرمتناوب تقسیم‌بندی کرد. سیگنال پیوسته در زمان $x(t)$ را متناوب می‌نامند هر گاه یک T مثبت وجود داشته باشد که به ازاء آن $x(t)=x(t+T)$ گردد. به عبارت دیگر سیگنال متناوب این ویژگی را دارد که در اثر جابجایی زمانی به اندازه T تغییر نمی‌کند. کوچکترین مقدار مثبت T را با T_0 نشان می‌دهند و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند.

سیگنال گسسته در زمان $x[n]$ را متناوب می‌نامند هر گاه یک مقدار مثبت و صحیح N وجود داشته باشد که به ازاء آن $x[n]=x[n+N]$ گردد. کوچکترین مقدار مثبت N را با N_0 نشان داده و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند.

تذکر: برخی از سیگنال‌های متناوب (توابع ثابت) فاقد دوره تناوب اصلی می‌باشند.

تذکر: با توجه به تعریف سیگنال متناوب گسسته در زمان دقت شود که دوره تناوب این سیگنال‌ها نمی‌تواند مقادیر غیر صحیح باشد.

تذکر: بدیهی است سیگنالی که نتوان برای آن دوره تناوب T (یا N) بدست آورد را سیگنال غیرمتناوب می‌نامند.

مثال: سیگنال $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-n)}$ متناوب است یا غیرمتناوب؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آن را تعیین کنید.

حل: برای تعیین متناوب یا نامتناوب بودن سیگنال فوق باید درستی رابطه $x(t+T)=x(t)$ را بررسی کنیم:

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2(t+T)-n)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t+2T-n)}$$

با فرض صحیح بودن مقدار 2T می‌توان تغییر متغیر $m=n-2T$ داد و در نتیجه:

$$x(t+T)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-m)}=x(t)$$

بنابراین $x(t)$ به ازاء کلیه مقادیر T به گونه‌ای که 2T عدد صحیح باشد متناوب است و کوچکترین مقدار مثبت T (دوره تناوب اصلی $x(t)$) برابر $T_0=\frac{1}{2}$ است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) توان (P) و انرژی (E) سیگنال $x[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$ به ترتیب عبارتند از:

۱) $E=+\infty \ , \ P=\frac{41}{18}$
۲) $E=+\infty \ , \ P=0$
۳) $E=+\infty \ , \ P=+\infty$
۴) $E=\frac{64}{9} \ , \ P=0$

حل: با روشی مشابه مثال قبل می‌توان نشان داد $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی $N_0=2$ است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۴) صحیح نیستند زیرا $E=+\infty$ و $P\neq0$ می‌باشند. از طرفی نزولی بودن سری تعریف کننده $x[n]$، محدود بودن نمونه‌های این سیگنال را تضمین می‌کند. بنابراین $P<+\infty$ و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

اگر بخواهیم P را محاسبه نمائیم، با توجه به آن‌که $N_0=2$ است داریم:

$$P=\frac{1}{2}\left(x^2[0]+x^2[1]\right)$$

$$x[0]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|-2m|}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-2|m|}=1+2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-2m}=1+2\left(2^{-2}+2^{-4}+\ldots\right)=1+2\times\frac{2^{-2}}{1-2^{-2}}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$x[1]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|1-2m|}=2\sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-(2m-1)}=2\left(2^{-1}+2^{-3}+2^{-5}+\ldots\right)=2\times\frac{2^{-1}}{1-2^{-2}}=\frac{4}{3}$$

$$P=\frac{1}{2}\left(\frac{25}{9}+\frac{16}{9}\right)=\frac{41}{18}$$

د ـ سیگنال‌ها را می‌توان به چهار دسته (۱) زوج (۲) فرد (۳) هم زوج هم فرد (۴) نه زوج نه فرد تقسیم‌بندی کرد.

سیگنال $x(t)$ (یا $x[n]$) را زوج می‌نامند هر گاه $x(-t)=x(t)$ (یا $x[n]=x[-n]$) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال زوج نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به محور عمودی متقارن است. (مانند شکل (۱ ـ ۴ ـ الف))

سیگنال $x(t)$ (یا $x[n]$) را فرد می‌نامند هر گاه $x(-t)=-x(t)$ (یا $x[-n]=-x[n]$) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال فرد نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به مبدا مختصات تقارن دارد. همچنین $x(0)=0$ (یا $x[0]=0$) می‌باشد. (مانند شکل (۱ـ۴ـ ب))

سیگنال هم زوج هم فرد به سیگنالی اطلاق می‌شود که هر دو شرط مربوط به سیگنال‌های زوج و فرد را برآورده سازد. به عبارت دیگر نمودار این سیگنال‌ها توأماً نسبت به مبدأ مختصات و محور عمودی تقارن دارد.

تذکر: از نظر تحلیلی تنها سیگنال هم زوج هم فردی که ابهام ندارد، سیگنال $x(t)=0$ (یا $x[n]=0$) است. به‌عنوان مثال سیگنال نشان داده شده در شکل (۱ ـ ۴ ـ ج) یک سیگنال هم زوج هم فرد با رابطه $|x(t)|=|t|$ است. ملاحظه می‌کنید که غیر از $t=0$ در بقیه نقاط در انتخاب مقدار $x(t)$ دچار ابهام می‌شویم. این مشکل در مورد سیگنال‌های گسسته در زمان نیز وجود دارد به گونه‌ای که برای هر نمونه دو مقدار قرینه وجود خواهد داشت! لذا از نظر طبقه‌بندی سیگنال‌ها و نقش آن‌ها در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیگنال‌های هم زوج هم فرد نقش مهمی ندارند.

سیگنال نه زوج ، نه فرد سیگنالی است که هیچ کدام از شروط زوج یا فرد بودن را برآورده نسازد. (مانند شکل (۱ـ۴ـ د))

تذکر: اگر سیگنالی نه زوج نه فرد باشد آن را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال ، یکی فرد و دیگری زوج نوشت. اگر سیگنال فرد را با $x_o(t)=odd\{x(t)\}$ (یا $x_o[n]$) و سیگنال زوج را با $x_e(t)=ev\{x(t)\}$ (یا $x_e[n]$) نشان دهیم، داریم:

$$x_e(t)=\frac{x(t)+x(-t)}{2} \qquad x_o(t)=\frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

روابط فوق برای سیگنال‌های گسسته در زمان نیز صادق است.

تذکر: اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) فرد باشد آن‌گاه داریم:

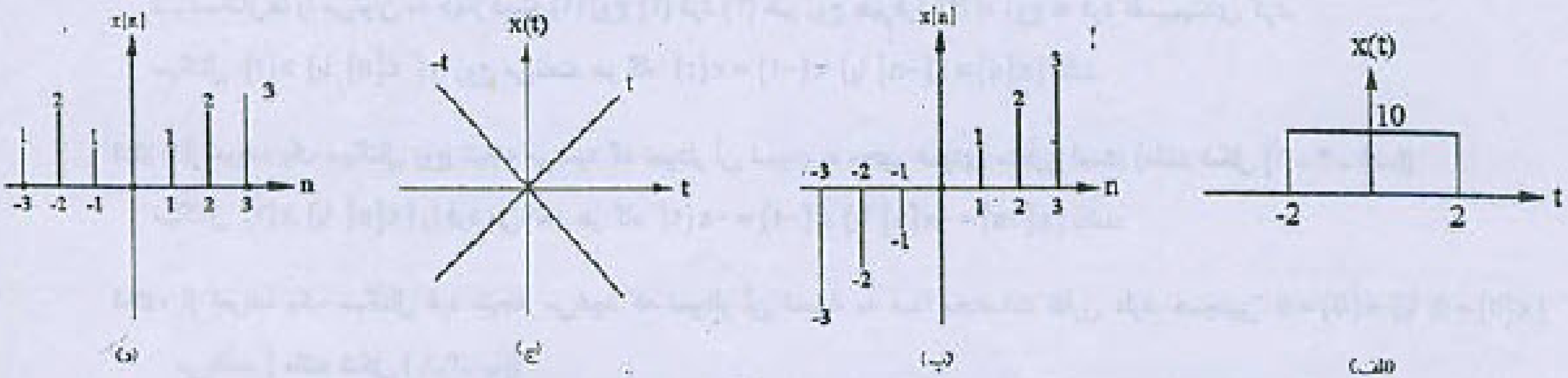
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt=0 \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]=0\right)$$

تذکر: اگر دو سیگنال هر دو زوج یا فرد باشند حاصل‌ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی زوج و اگر یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد حاصل ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی فرد است.

تذکر : اگر $x(t)$ (یا $x[n]$) سیگنالی نه زوج ، نه فرد باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_o^2[n]$$



شکل ۱-۴- (الف) سیگنال زوج (ب) سیگنال فرد (ج) سیگنال هم زوج، هم فرد (د) سیگنال نه زوج ، نه فرد

۱-۲- تبدیلات متغیر مستقل

یکی از مفاهیم بنیادی تحلیل سیگنال و سیستم، تبدیل سیگنال است. در این بخش به تبدیلات ساده متغیر مستقل می‌پردازیم. در این تبدیلات، متغیر مستقل سیگنال (یعنی محور زمان) تغییر کرده و سیگنال در جهت عمودی تغییری نخواهد داشت.

الف ـ وارونگی محور زمان: اگر در سیگنال پیوسته در زمان t به $-t$ و در سیگنال گسسته در زمان n به $-n$ تبدیل شود، نمودار سیگنال فوق نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود.

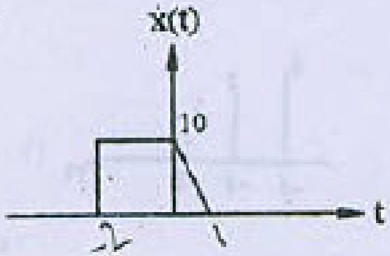
ب ـ جابجائی زمانی: با تبدیل t به $t-t_0$ در سیگنال پیوسته در زمان و n به $n-n_0$ (n_0 عدد صحیح) در سیگنال گسسته در زمان، سیگنال روی محور زمان جابجا می‌شود. اگر $t_0>0$ (یا $n_0>0$) جابجایی به سمت راست و در صورتی که $t_0<0$ (یا $n_0<0$) باشد، جابجائی به سمت چپ خواهد بود.

ج ـ فشردن یا گستردن: با تبدیل t به at در سیگنال پیوسته در زمان و n به an در سیگنال گسسته در زمان (با فرض $a>0$) سیگنال در جهت محور زمان فشرده یا گسترده می‌شود. اگر $a>1$ باشد سیگنال فشرده و اگر $0<a<1$ باشد سیگنال گسترده می‌شود.

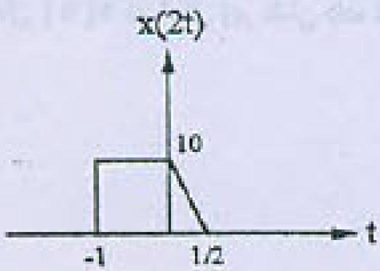
تذکر : در هنگامی که سیگنال گسسته در زمان باشد با فشردن آن تعدادی از نمونه‌ها حذف گردیده و با گستردن آن تعدادی صفر اضافه می‌شود.

تذکر : در برخی مواقع تبدیل متغیر مستقل به صورت t به $\alpha t+\beta$ (یا n به $\alpha n+\beta$) می‌باشد که α,β ثابت‌های حقیقی می‌باشند. در این وضعیت هر سه نوع تبدیل متغیر مستقل را به صورت توام داریم.

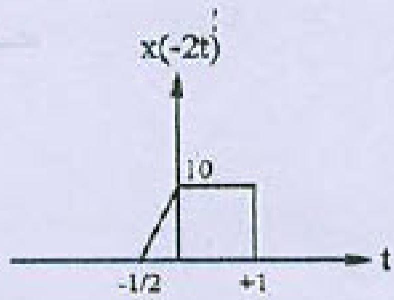
مثال : فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال پیوسته در زمان مطابق شکل زیر باشد. $x(-2t-3)$ را رسم کنید.



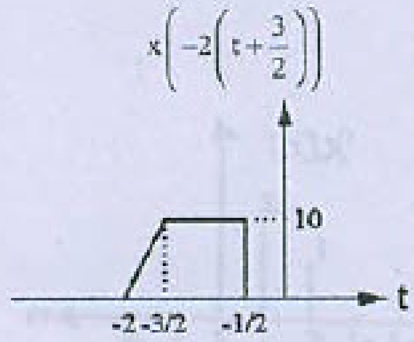
حل : به دو طریق نشان داده شده در شکل‌های زیر می‌توان این مثال را حل کرد:



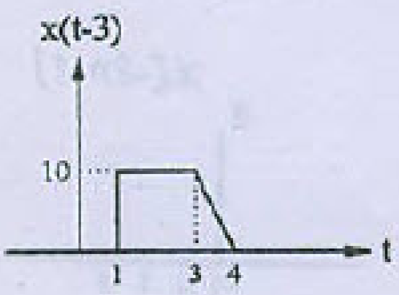
(فشردن)



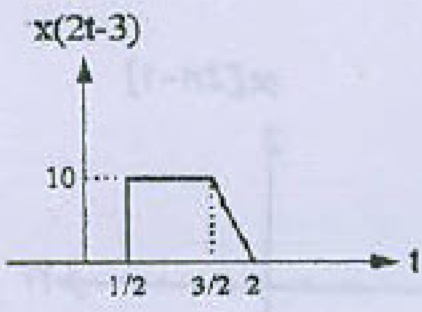
(معکوس کردن)



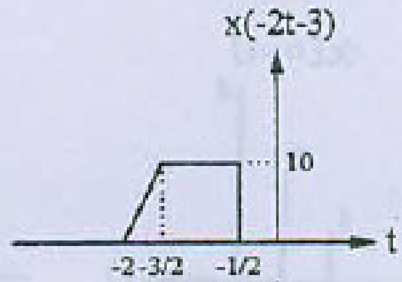
(شیفت به چپ)



(شیفت به راست)

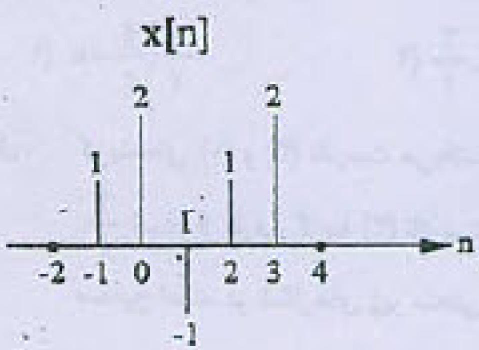


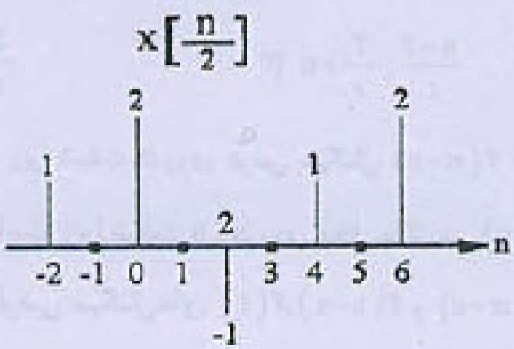
(فشردن)

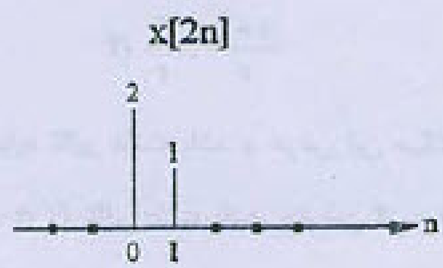


(معکوس کردن)

مثال : در شکل‌های زیر چگونگی فشرده شدن و گسترده شدن یک سیگنال گسسته در زمان در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند.



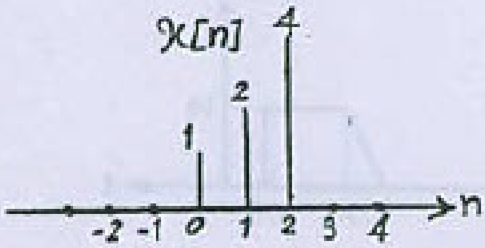




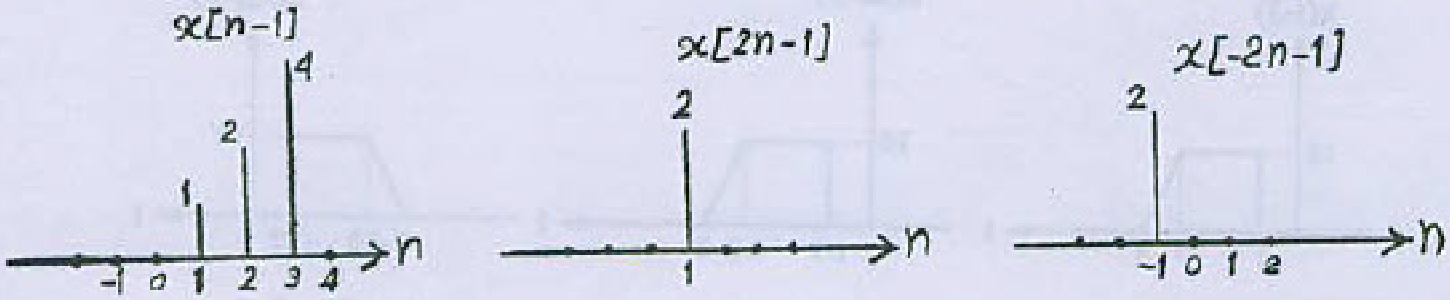
تست نمونه ـ اگر $x[n]=2^n\left(u[n]-u[n-3]\right)$ باشد آنگاه شکل $x[-2n-1]$ کدام است؟

حل:

سیگنال $x[n]$ در شکل زیر نشان داده شده است:



سیگنال فوق را ابتدا شیفت داده تا $x[n-1]$، سپس فشرده کرده تا $x[2n-1]$ و در نهایت معکوس کرده تا $x[-2n-1]$ به‌دست می‌آید. این شکل‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:

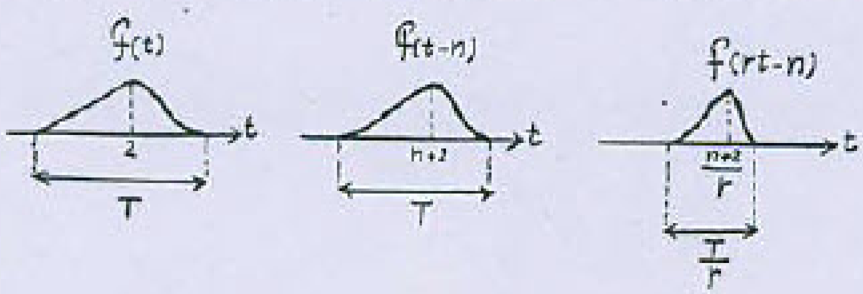


پس گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه ـ (سراسری ۸۵) اگر $f(t)$ سیگنالی به عرض T و ماکزیممی واقع بر $t=2$ باشد، در آن صورت عرض و محل ماکزیمم $f(rt-n)$ $(r>0)$ عبارتند از:

۱) $\frac{n}{r}, \frac{T}{r}-n$ ۲) $\frac{2}{r}, \frac{T}{r}$ ۳) $\frac{n-2}{r}, \frac{T}{r}+n$ ۴) $\frac{n+2}{r}, \frac{T}{r}$

حل: گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. زیرا شیفت n روی عرض سیگنال $f(rt-n)$ نباید تاثیر داشته باشد و عرض این سیگنال $\frac{T}{r}$ است. از طرفی گزینه (۲) نادرست است. زیرا شیفت n باید روی محل ماکزیمم $f(rt-n)$ تاثیر داشته باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. در شکل‌های زیر منحنی فرضی سیگنال‌های $f(t)$، $f(t-n)$ و $f(rt-n)$ نشان داده شده‌اند:



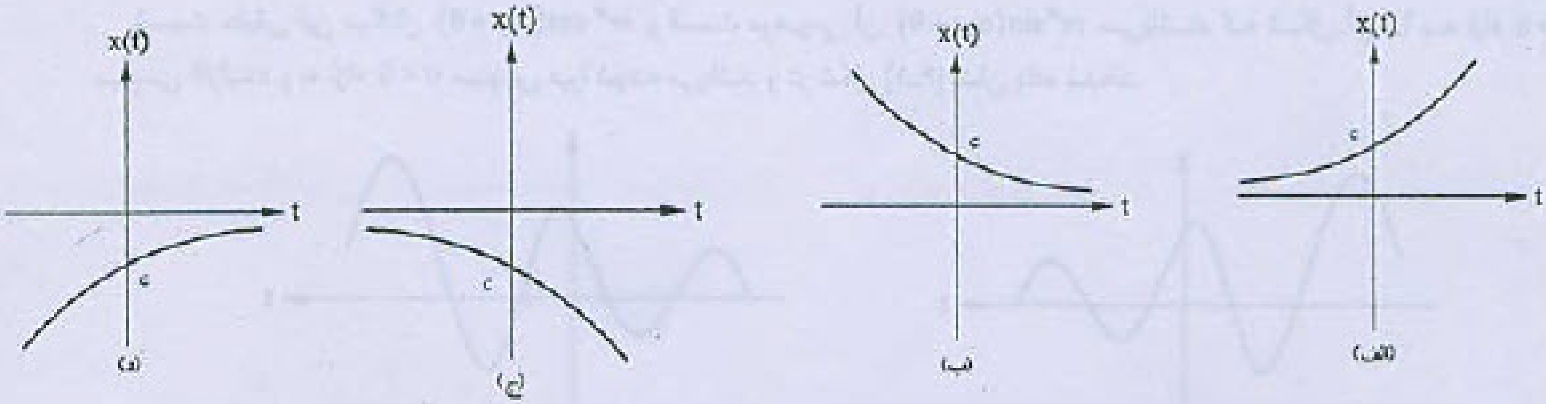
۱ـ۳ـ برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

در این بخش برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان معرفی می‌شوند. این سیگنال‌ها علاوه بر آن‌که در طبیعت وجود دارند، برای ساخت سایر سیگنال‌ها نیز استفاده می‌شوند.

الف ـ سیگنال‌های نمائی پیوسته در زمان: شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها $x(t)=ce^{at}$ است که با توجه به وضعیت c و a سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردند.

الف ـ ۱ـ سیگنال نمائی حقیقی: اگر c و a حقیقی باشند آن‌گاه سیگنال حاصل را سیگنال نمائی حقیقی پیوسته در زمان می‌نامند.

در شکل (۱ـ۵) نمودار این سیگنال به ازاء مقادیر مثبت و منفی c و a رسم شده است.



شکل ۱ـ۵ ـ نمودار سیگنال $x(t)=ce^{at}$ به ازای (الف) $a>0$ و $c>0$ (ب) $a<0$ و $c>0$ (ج) $a>0$ و $c<0$ (د) $a<0$ و $c<0$

الف ـ ۲ ـ سیگنال متناوب نمائی مختلط و سینوسی: اگر c حقیقی و a موهومی باشند، دسته مهمی از سیگنال‌های نمائی بدست می‌آیند. با فرض $c=1$ و $a=j\omega_0$ داریم:

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \Rightarrow \operatorname{Re}\{x(t)\}=\cos(\omega_0 t) \quad , \quad \operatorname{Im}\{x(t)\}=\sin(\omega_0 t)$$

ملاحظه کنید قسمت حقیقی و موهومی سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ سیگنال‌های $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ می‌باشند.

خواص مهم سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ عبارتند از:

۱) این سیگنال به ازاء کلیه مقادیر ω_0 متناوب و دوره تناوب آن $T=\frac{2k\pi}{\omega_0}$ است.

۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال به ازاء $k=1$ یا $k=-1$ بدست آمده و $T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ است.

۳) با افزایش ω_0 مقدار T_0 کوچکتر شده و در نتیجه سرعت تغییرات این سیگنال افزایش می‌یابد.

۴) سیگنال فوق یک سیگنال توان با $P_\infty=1$ است. البته توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن با توان متوسط روی یک دوره تناوب برابر است.

۵) از روی سیگنال فوق هارمونیک‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_k(t)=e^{jk\omega_0 t} \quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

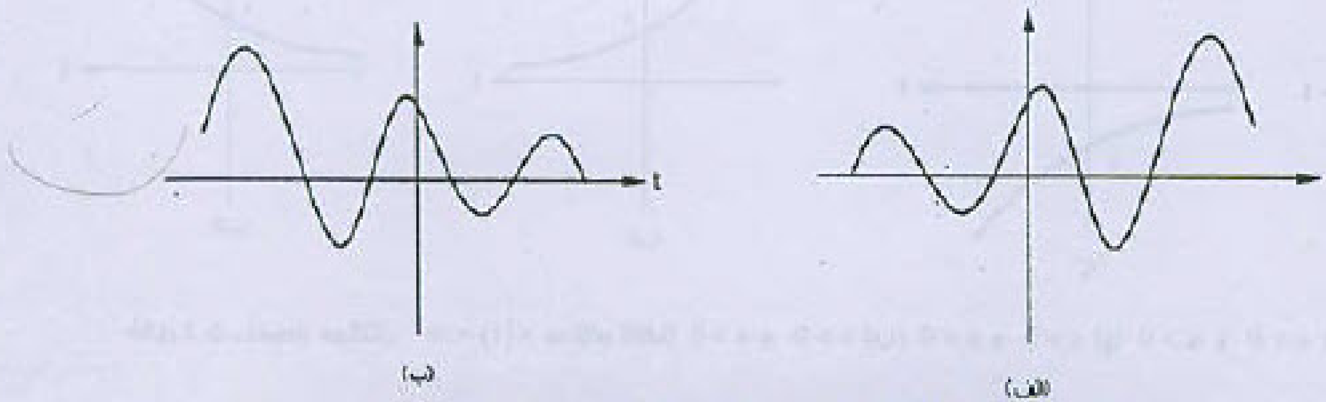
$\phi_1(t)=e^{j\omega_0 t}$ را هارمونیک اصلی (پایه)، ω_0 را فرکانس اصلی (پایه) و $T_k=\frac{2\pi}{|\omega_k|}$ را دوره تناوب اصلی (پایه) می‌نامند. بدیهی است تعداد هارمونیک‌های پیوسته در زمان بی‌نهایت می‌باشد.

نتیجه ـ سیگنال‌های $\cos(\omega_0 t)$ و $\sin(\omega_0 t)$ نیز به ازاء کلیه مقادیر ω_0 با دوره تناوب $T=\frac{2k\pi}{\omega_0}$ و دوره تناوب اصلی $T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ متناوب می‌باشند. همچنین برای این دو سیگنال $P_\infty=\frac{1}{2}$ است. هارمونیک‌ها نیز برای این دو سیگنال به صورت $\cos(k\omega_0 t)$ و $\sin(k\omega_0 t)$ تعریف می‌گردند.

الف ـ ۳ـ سیگنال نمائی مختلط: اگر c و a هر دو مختلط باشند، آن‌گاه سیگنال نمائی مختلط بدست می‌آید. با فرض $c=re^{j\theta}$ و $a=\sigma+j\omega_0$ داریم:

$$x(t)=re^{j\theta}.e^{(\sigma+j\omega_0)t}=re^{\sigma t}e^{j(\omega_0 t+\theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال $re^{\sigma t}\cos(\omega_0 t+\theta)$ و قسمت موهومی آن $re^{\sigma t}\sin(\omega_0 t+\theta)$ می‌باشند که شکل آن‌ها به ازاء $\sigma>0$ سینوسی افزاینده و به ازاء $\sigma<0$ سینوسی میرا شونده می‌باشند و در شکل (۱ـ۶) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ـ۶ـ (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

ب ـ توابع پله و ضربه واحد پیوسته در زمان:

تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

تابع ضربه واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

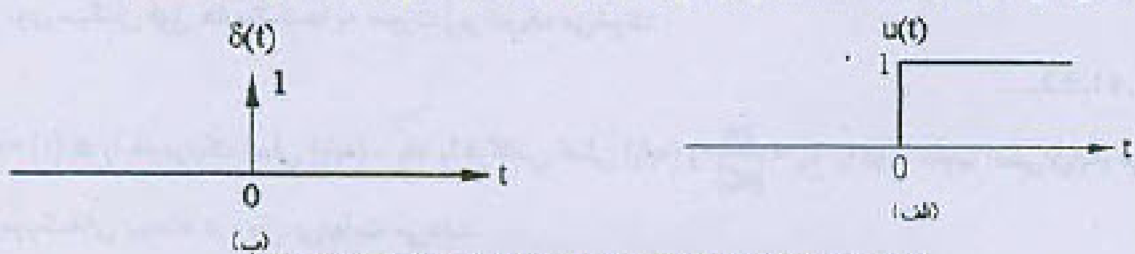
$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \text{ویژه} & t=0\end{cases}$$

ویژگی به گونه‌ای است که

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{-0}^{+0}\delta(t)dt=1$$

یعنی سطح زیر منحنی تابع ضربه برابر یک است. نمودار تابع پله و ضربه واحد در شکل (۱ـ۷) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ـ۷ـ (الف) نمودار تابع پله واحد (ب) نمودار تابع ضربه واحد.

تذکر: تابع پله در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(f(t))=\begin{cases}1 & f(t)>0\\ 0 & f(t)<0\end{cases}$$

به عبارت دیگر برای ترسیم نمودار این تابع باید یک فرآیند تعیین علامت انجام شود.

تذکر: تابع $\delta(f(t))$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(f(t))\begin{cases}0 & ;f(t)\neq 0\\ \text{ویژه} & ;f(t)=0\end{cases}$$

ویژگی به گونه‌ای است که سطح زیر منحنی $\delta(f(t))$ برابر یک باشد.

برای ترسیم این تابع باید ابتدا نقاطی که به ازای آن‌ها $f(t)=0$ می‌شود را تعیین کرد. اگر این نقاط را $t=t_1,t_2,\dots,t_N$ بنامیم داریم:

$$f(t)=k(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_N)$$

آن‌گاه با توجه به رابطه $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$ می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\delta(f(t))=\frac{1}{|k|}\left\{\frac{1}{|t_1-t_2|\dots|t_1-t_N|}\delta(t-t_1)+\dots+\frac{1}{|t_N-t_1|\dots|t_N-t_{N-1}|}\delta(t-t_N)\right\}$$

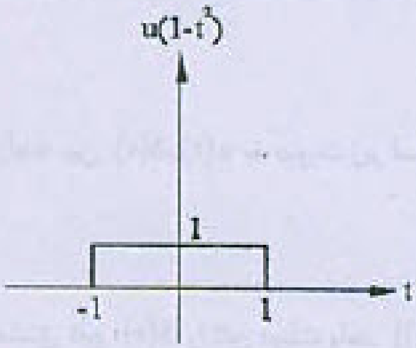
مثال: توابع $u(1-t^2)$ و $\delta(1-t^2)$ را رسم کنید.

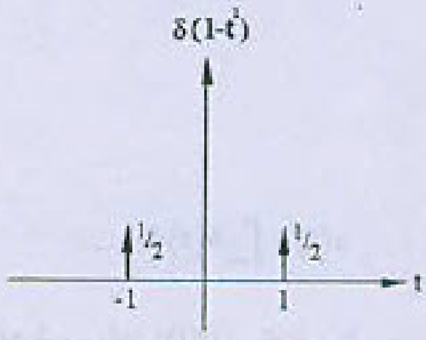
حل:

$$u(1-t^2)=\begin{cases}0 & 1-t^2<0\\ 1 & 1-t^2>0\end{cases}\rightarrow u(1-t^2)=\begin{cases}0 & t>1,t<-1\\ 1 & -1<t<1\end{cases}$$

$$\delta(1-t^2)=\delta((1-t)(1+t))=\frac{1}{2}\delta(1-t)+\frac{1}{2}\delta(1+t)$$

در شکل‌های زیر نمودار این دو تابع نشان داده شده‌اند:



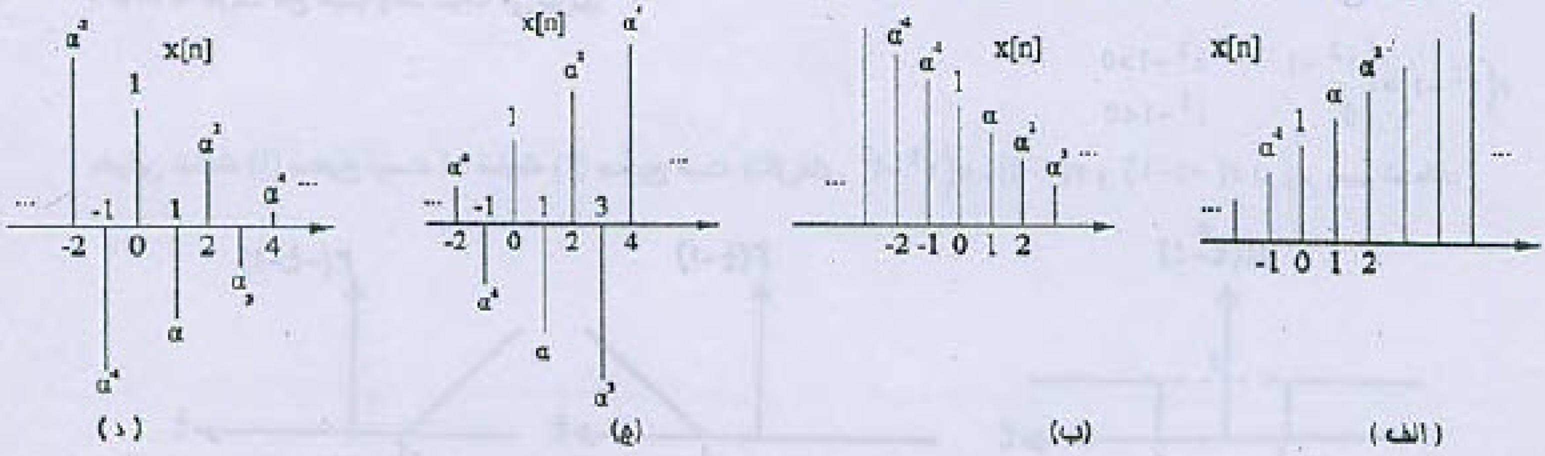


۱ـ۴ـ برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان

در این بخش مشابه بخش قبل برخی سیگنال‌های مهم گسسته در زمان بررسی خواهند شد.

الف ـ سیگنال‌های نمائی گسسته در زمان: شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها $x[n]=c\alpha^n$ است. با توجه به مقادیر c و α سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردند.

الف ـ ۱ـ سیگنال نمائی حقیقی: اگر c و α حقیقی باشند، سیگنال حاصل یک سیگنال نمائی حقیقی است. در شکل(۱ـ۸) این سیگنال به ازاء $c=1$ و مقادیر مختلف α نشان داده شده است.



شکل ۱ـ۸ـ سیگنال نمائی حقیقی به ازای (الف) $\alpha>1$ (ب) $0<\alpha<1$ (ج) $\alpha<-1$ (د) $-1<\alpha<0$

الف ـ ۲ـ سیگنال نمائی مختلط و سینوسی: اگر c حقیقی و $\alpha=e^{j\omega_0}$ باشند، این سیگنال بدست می‌آید. با فرض $c=1$ داریم:

$$x[n]=e^{j\omega_0 n}\longrightarrow \mathrm{Re}\{x[n]\}=\cos(\omega_0 n)\quad,\quad \mathrm{Im}\{x[n]\}=\sin(\omega_0 n)$$

بنابراین قسمت‌های حقیقی و موهومی این سیگنال به ترتیب $\cos(\omega_0 n)$ و $\sin(\omega_0 n)$ می‌باشند.

خواص مهم سیگنال $e^{j\omega_0 n}$ عبارتند از:

۱) این سیگنال به ازای کلیه مقادیر ω_0 متناوب نیست و فقط هنگامی متناوب است که ω_0 مضرب گویائی از π باشد. دلیل آن است که دوره تناوب این سیگنال یعنی $N=\dfrac{2k\pi}{\omega_0}$ باید یک عدد صحیح باشد.

۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال لزوما به ازای $k=1$ بدست نمی‌آید. بلکه هر k که اولین عدد مثبت برای N را بدهد مشخص کننده دوره تناوب اصلی سیگنال است.

۳)با افزایش ω_0 لزوماً سرعت تغییرات این سیگنال زیاد نمی‌شود. بلکه افزایش یا کاهش سرعت این سیگنال مطابق جدول زیر متناوبا در بازه‌های 2π تکرار می‌شود.

ω_0 (مضرب گویا از π)	0	π	2π	3π	4π	......
سرعت تغییرات $e^{j\omega_0 n}$	□	□	□	□	□	......

الف ـ ۳ ـ سیگنال نمائی مختلط کلی: اگر c و α هر دو مختلط باشند. آن‌گاه این سیگنال بدست می‌آید. با فرض $c = re^{j\theta}$ و $\alpha = ke^{j\omega_0}$ داریم:

$$x[n] = re^{j\theta}.k^n e^{j\omega_0 n} = rk^n e^{j(\omega_0 n+\theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال $rk^n \cos(\omega_0 n+\theta)$ و قسمت موهومی آن $rk^n \sin(\omega_0 n+\theta)$ است که به ازای $|k|>1$ سینوسی افزاینده و به ازاء $|k|<1$ سینوسی میرا شونده می‌باشند و در شکل (۱ـ۹) نشان داده شده‌اند:

شکل ۱ـ۹ (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

ب ـ توابع پله و ضربه گسسته در زمان

تابع پله واحد گسسته در زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

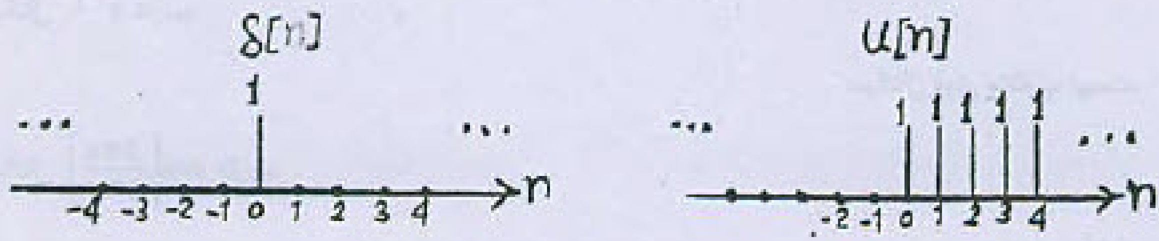
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

تابع ضربه واحد گسسته در زمان (یا تابع نمونه واحد) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

بدیهی است که برای تابع ضربه واحد داریم $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

نمودار تابع پله واحد و ضربه واحد گسسته در زمان در شکل (۱ ـ ۱۰) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱ ـ ۱۰ ـ (الف) نمودار تابع پله واحد گسسته (ب) نمودار تابع ضربه واحد گسسته

تذکر: خاصیت غربالی تابع ضربه گسسته در زمان با روابط زیر تعریف می‌گردد:

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n]=x[0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]$$

تذکر: رابطه بین $\delta[n]$ و $u[n]$ به صورت زیر است:

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1] \qquad u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

تذکر: با توجه به تعریف تابع ضربه واحد گسسته در زمان می‌توان نتیجه گرفت: (a اسکالر حقیقی است)

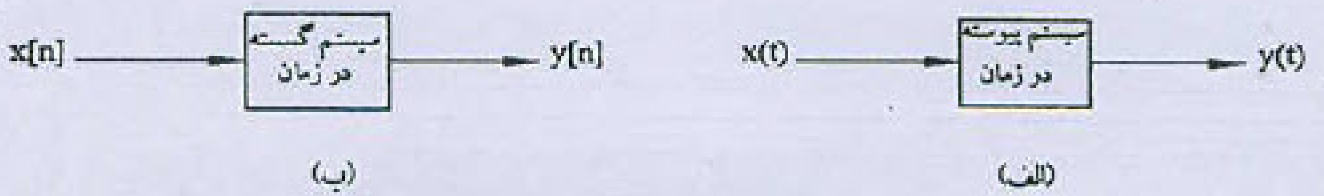
$$\delta[an]=\delta[n]$$

۲ـ سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان و خواص آن‌ها

۲ـ۱ـ سیستم‌ها، تقسیم‌بندی و اتصالات آن‌ها

تعریف سیستم: سیستم مجموعه‌ای سازمان یافته از واحدهای مختلف (زیر سیستم‌ها) می‌باشد که با اثر متقابل و برای دستیابی به اهداف خاص طراحی می‌شود.

تقسیم‌بندی سیستم‌ها: سیستم‌ها در اولین تقسیم‌بندی به دو دسته (۱) سیستم پیوسته در زمان و (۲) سیستم گسسته در زمان تقسیم می‌شوند سیستم پیوسته در زمان سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی پیوسته در زمان به سیگنال‌های خروجی پیوسته در زمان تبدیل می‌شوند. در صورتی که سیستم گسسته در زمان سیستمی است که سیگنال‌های ورودی گسسته در زمان را به سیگنال‌های خروجی گسسته در زمان تبدیل می‌کند. در شکل (۲ـ۱) این دو نوع سیستم نشان داده شده‌اند.



شکل ۲ـ۱ـ (الف) سیستم پیوسته در زمان (ب) سیستم گسسته در زمان

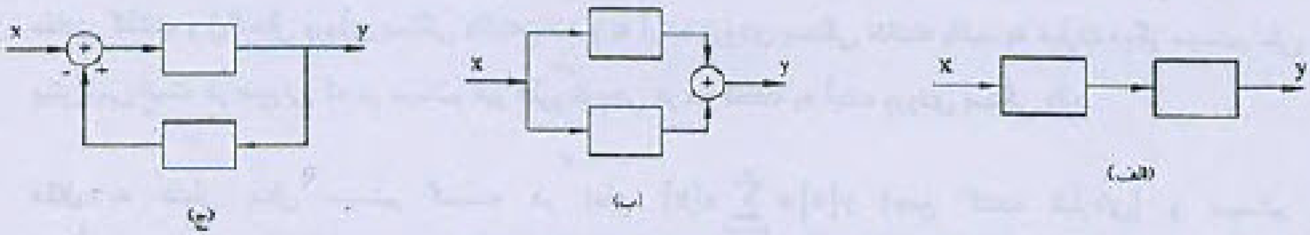
تذکر: تقسیم‌بندی سیستم‌ها به دو نوع ذکر شده محدود نمی‌شود و در برخی سیستم‌های پیچیده تر ممکن است ورودی یا خروجی پیوسته در زمان و دیگری گسسته در زمان باشد. در ادامه و در مبحث نمونه‌برداری، این دسته از سیستم‌ها نیز بررسی می‌گردند.

اتصال سیستم‌ها: معمولاً سیستم‌های واقعی از اتصال زیر سیستم‌های ساده‌تر تشکیل می‌شوند. لذا چگونگی اتصال آن‌ها و بررسی خواص مربوطه اهمیت زیادی دارد. به طور کلی سه اتصال اساسی (پایه) برای سیستم‌ها وجود دارد که عبارتند از:

۱) **اتصال سری:** در این اتصال ورودی به یکی از سیستم‌ها اعمال شده و خروجی از سیستم دوم گرفته می‌شود. خروجی سیستم اول نیز به ورودی سیستم دوم متصل می‌گردد. در شکل (۲ـ۲ـ الف) این اتصال نشان داده شده است و در برخی مواقع اتصال متوالی یا زنجیره‌ای (cascade) نیز نامیده می‌شود.

۲) **اتصال موازی :** در این اتصال ورودی به هر دو سیستم اعمال شده و خروجی آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند و خروجی کلی را درست می‌کنند. در شکل (۲ـ۲ـ ب) این اتصال نشان داده شده است.

۳) **اتصال فیدبک:** در این اتصال خروجی سیستم اول که خروجی کلی نیز می‌باشد، توسط سیستم دوم تغییر داده شده و پس از کم شدن یا جمع شدن با ورودی (فیدبک منفی یا مثبت) به ورودی سیستم اول داده می‌شود. در شکل (۲ـ۲ـ ج) این اتصال نشان داده شده است.



شکل ۲ـ۶ـ (الف) اتصال سری (ب) اتصال موازی (ج) اتصال فیدبک

۲ـ۲ـ خواص سیستم‌ها

در این بخش برخی از خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان بررسی می‌گردند. در این بررسی شش خاصیت اصلی سیستم‌ها معرفی می‌گردند.

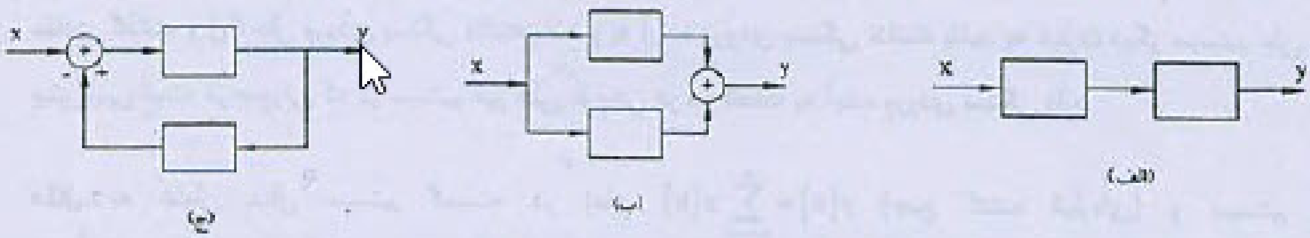
الف ـ سیستم‌های حافظه‌دار و بدون حافظه: سیستمی بدون حافظه نامیده می‌شود که خروجی آن به ازاء هر متغیر مستقل (هر زمان) به ورودی در همان مقدار متغیر مستقل (همان زمان) بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارد. در غیر این صورت سیستم را حافظه‌دار می‌نامند.

مثال: به عنوان مثال سیستم گسسته در زمان $y[n]=2\left(x[n]-x^2[n]\right)$ و سیستم پیوسته در زمان $y(t)=10x^3(t)$ بدون حافظه می‌باشند. اما سیستم گسسته در زمان $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M}x[n-k]$ که یک سیستم میانگین‌گیر است، یک سیستم با حافظه می‌باشد.

مثال: در میان عناصر مداری مقاومت LTI با رابطه $v(t)=Ri(t)$ یک عنصر بدون حافظه می‌باشد. در صورتی که سلف و خازن LTI با روابط $v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$ و $v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')dt'$ عناصر حافظه‌دار می‌باشند.

تذکر: هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را حافظه‌دار نمایند.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases} t & t\le 2 \\ x^2(t) & t>2 \end{cases}$ بدون حافظه است. زیرا اثری از وابستگی به گذشته یا آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی‌که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)>0 \\ 2x(t-1) & x(t)\le 0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن ضابطه $2x(t-1)$ و سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی ـ ورودی $y[n]=\begin{cases} x[n] & x[n-1]\ge 0 \\ n^2x[n] & x[n-1]<0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن شروط رابطه، سیستم‌های حافظه‌دار می‌باشند.



شکل ۲-۳- (الف) اتصال سری (ب) اتصال موازی (ج) اتصال فیدبک

۲-۲- خواص سیستم‌ها

در این بخش برخی از خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان بررسی می‌گردند. در این بررسی شش خاصیت اصلی سیستم‌ها معرفی می‌گردند.

الف - سیستم‌های حافظه‌دار و بدون حافظه: سیستمی بدون حافظه نامیده می‌شود که خروجی آن به ازاء هر متغیر مستقل (هر زمان) به ورودی در همان مقدار متغیر مستقل (همان زمان) بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارد. در غیر این صورت سیستم را حافظه‌دار می‌نامند.

مثال: به عنوان مثال سیستم گسسته در زمان $y[n]=2\left(x[n]-x^2[n]\right)$ و سیستم پیوسته در زمان $y(t)=10x^3(t)$ بدون حافظه می‌باشند. اما سیستم گسسته در زمان $y[n]=\frac{1}{2M+1}\sum_{k=-M}^{+M}x[n-k]$ که یک سیستم میانگین‌گیر است، یک سیستم با حافظه می‌باشد.

مثال: در میان عناصر مداری مقاومت LTI با رابطه $v(t)=Ri(t)$ یک عنصر بدون حافظه می‌باشد. در صورتی که سلف و خازن LTI با روابط $v_L(t)=L\frac{di_L}{dt}$ و $v_c(t)=v_c(0)+\frac{1}{C}\int_0^t i_c(t')dt'$ عناصر حافظه‌دار می‌باشند.

تذکر: هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را حافظه‌دار نمایند.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y(t)=\begin{cases} t & t\le 2 \\ x^2(t) & t>2 \end{cases}$ بدون حافظه است زیرا اثری از وابستگی به گذشته یا آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی‌که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)>0 \\ 2x(t-1) & x(t)\le 0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن ضابطه $2x(t-1)$ و سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی $y[n]=\begin{cases} x[n] & x[n-1]\ge 0 \\ n^2x[n] & x[n-1]<0 \end{cases}$ به دلیل حافظه‌دار بودن شروط رابطه، سیستم‌های حافظه‌دار می‌باشند.