

۱) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$ ۳) $y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x$
 ۲) $y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$ ۴) $y = \cot x \Rightarrow y' = -(1 + \cot^2 x)$

سوال (سین کوابع زیر ایڈسے اورید۔)

۱) $y = 3 \sin x + 2 \cos x \rightarrow y' = 3 \cos x - 2 \sin x$

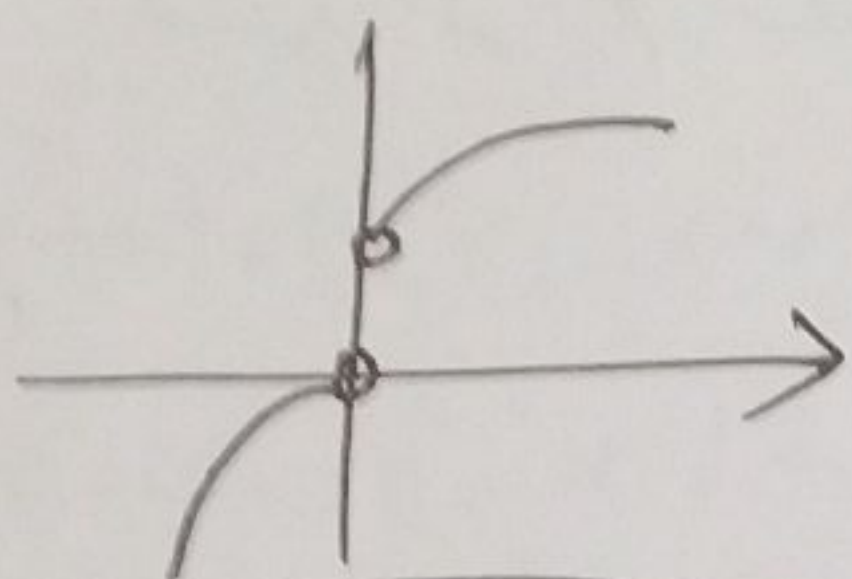
۲) $y = (\sin x)(\tan x) \rightarrow (+\cos x)(\tan x) + (1 + \tan^2 x)(\sin x)$

۳) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \rightarrow y' = \frac{(-\sin x)(1 + \sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(1 + \sin x)^2}$

سادہ سے سہل

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|----------------------|
| ۱۹ - فخریہ خانم رحمت | ۱۰ - احمد سمیں مراد | ۱ - حامد خادمی |
| ۲۰ - ابو الفضل سالاروند | ۱۱ - نور دین میرزا فرید | ۲ - علی باجلان |
| ۲۱ - محمد اسدی | ۱۲ - سیان زلفی | ۳ - کا دین علی |
| ۲۲ - رضا حاجیوند | ۱۳ - علی عیسیٰ | ۴ - سکندر سالاروند |
| | ۱۴ - سالار پاپی پور | ۵ - سیرمان برادر |
| | ۱۵ - علی سیان | ۶ - علی دل پست |
| | ۱۶ - علی حاجیوند | ۷ - حسن ازانی |
| | ۱۷ - محمد رجب | ۸ - مصطفیٰ سلیمان |
| | ۱۸ - علی عزیز | ۹ - علی قالی حاجیوند |

آیا تابع زیر در نقطه $x=0$ مشتق پذیر است. چرا؟
(نیست چون پیوسته نیست)



۱) $y = c \Rightarrow y' = 0$

۲) $y = x \Rightarrow y' = 1$

۳) $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

۴) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

۵) $y = (f(x))^n \Rightarrow y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$

۶) $y = \sqrt[k]{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{k \sqrt[k]{x^{k-1}}}$

۷) $y = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y' = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}}$

سوال ۵ (مشتق تابع زیر را بیاب و بگو)

۱) $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

۲) $y = kx + d \Rightarrow y' = k$

۳) $y = x^v \Rightarrow y' = v x^{v-1}$

۴) $y = r x^q \rightarrow y' = r q x^{q-1}$

۵) $y = kx^a - \delta x^b + \gamma x + c$

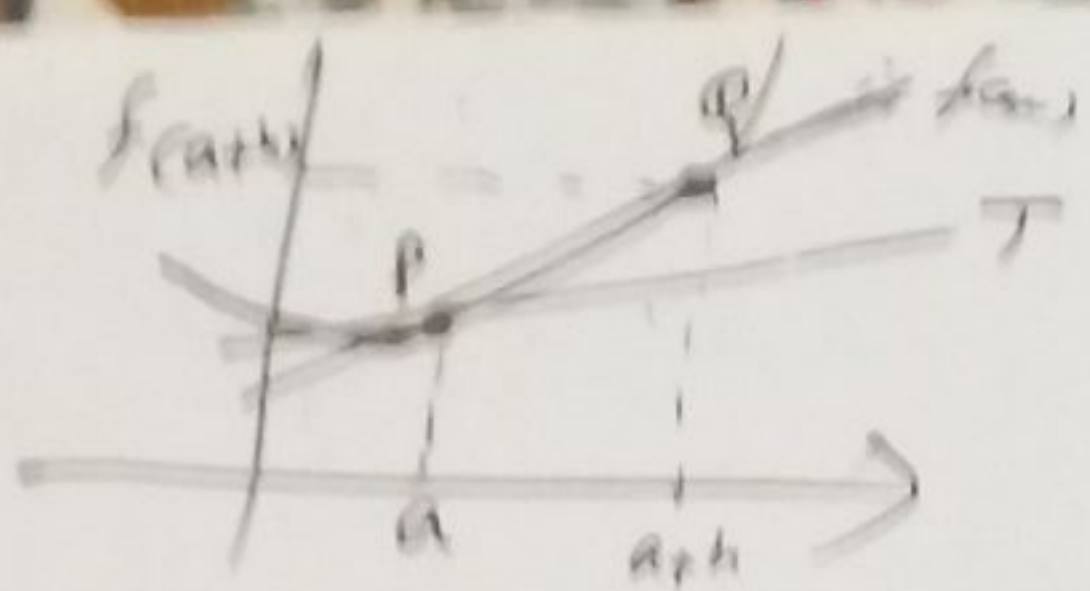
۶) $y = (x^c - x)(\delta x^r + \epsilon)$

۷) $\frac{x^c + vx}{rx^e + c}$ ۸) $y = \frac{r}{x^f - x}$

۹) $y = \sqrt[r]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{r \sqrt[r]{x^{r-1}}}$

۱۰) $y = \sqrt[3]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$

۱۱) $y = \sqrt[v]{x^\delta} \rightarrow y' = \frac{\delta}{v \sqrt[v]{x^{v-\delta}}}$



سوال ۱۹
 خط مذکور، نزدیکی از نقطه P و Q از رابطه زیر بدست آید:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

مقدار حد فوق، در صورت وجود مشتق تابع f در a و $f(a)$ و $f'(a)$ مساوی است:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

سوال ۲۰ (سوال) مشتق پذیری تابع $f(x) = |x-1|$ را در نقطه $x=1$ بررسی کنید.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| - 0}{x-1}$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1$

چون حد، چپ و راست نابرابرند پس حد فوق موجود نیست پس $f'(1)$ وجود ندارد.

سوال ۲۱ (سوال) مشتق تابع $f(x) = 2x+1$ را در نقطه $x=-1$ بررسی کنید.

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1) - (-1)}{x - (-1)} = \frac{2x+2}{x+1} = \frac{2(x+1)}{(x+1)} = 2$$

تذکره: اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد آن گاه پیوسته است.

سوال ۲۲ (سوال) تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1|, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر است.

اگر a را بدست آوریم (چون f در $x=1$ مشتق پذیر است پس پیوسته است):
 $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$
 $f(1) = a$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a$

سوال 5) در نقطه $x=1$ ، $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1 \\ 2, & x=1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$ تعریف شده است.

- ✓ 1) $f(1) = 2$
 ✓ 2) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3 \end{cases}$

3) ~~$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$~~
 $f(1) = 2 \Rightarrow f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ X

در نقطه $x=1$ پیوسته نیست ←

سوال 6) در نقطه $x=0$ بررسید $f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 0 \\ -1, & x=0 \\ -x-1, & x < 0 \end{cases}$

سوال 7) مقادیر a و b را طوری بیابید که $f(x) = \begin{cases} ax+1, & x > 2 \\ 4, & x=2 \\ 2x+b, & x < 2 \end{cases}$

در نقطه $x=2$ پیوسته است
 $f(2) = 4$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (ax+1) = 2a+1 \Rightarrow 2a+1 = 4 \Rightarrow 2a = 4-1=3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x+b) = 4+b = 4 \Rightarrow b = 4-4 = 0$

(17)

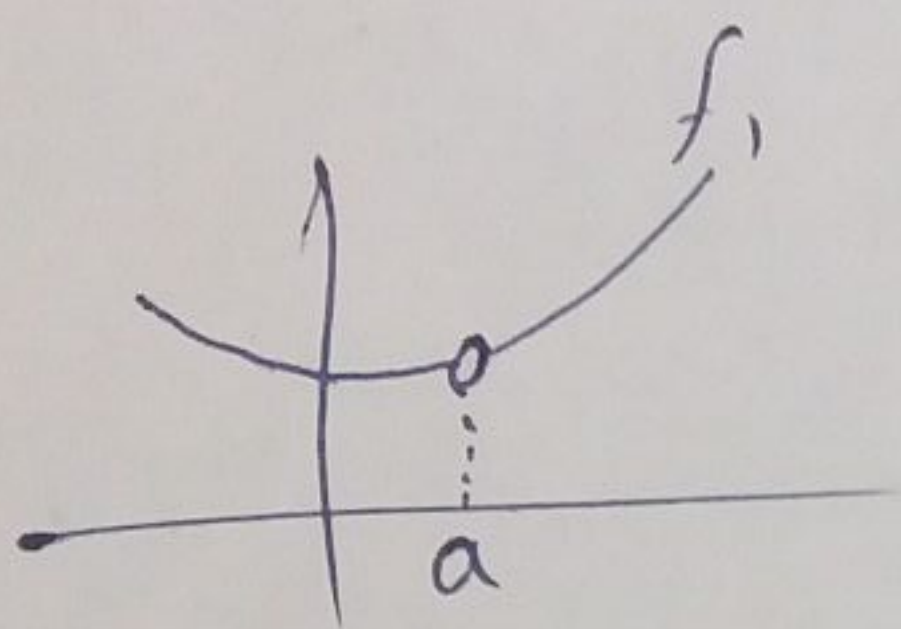
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{مفردش}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

پیوستگی تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه دارای شرط زیر باشد:

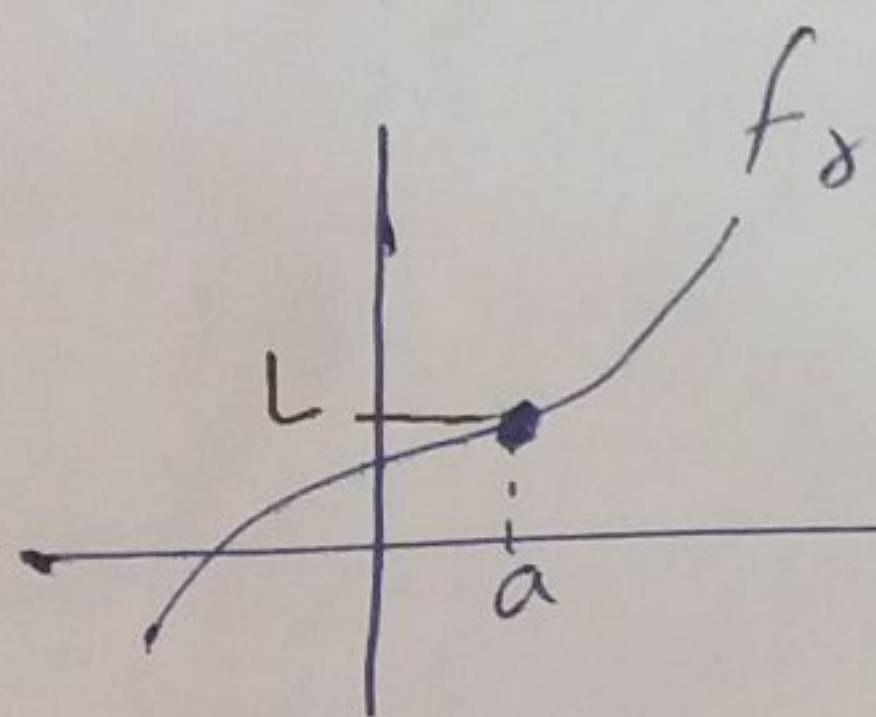
(الف) $f(a)$ موجود باشد (یعنی تعریف شده باشد)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (\text{ع})$$



(ب) تابع f_1 در $x=a$ تعریف شده نیست پس f_1 در a پیوسته نیست.



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{در } x=a \text{ پیوسته است}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = L$$

(یعنی تعریف شده و دارد)

سوال 5

تابع $f(x)$ در $x=8$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 18 & , x > 8 \\ 1 & , x = 8 \\ -2x + 20 & , x < 8 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = 1$$

در حد $x=8$ راست با هم برابرند

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} x^2 - 18 = 28 - 18 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} -2x + 20 = -10 + 20 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} f(x) = f(8) = 1 \Rightarrow \text{پیوسته است } f(x) \text{ در } x=8$$

محدوده تعریف $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ -x^2+1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ دارد. در صورت وجود

آن، ابروی آورید $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2+1) = 0+1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$

اما در دو صورت دیگر

عدهای بیگانه $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ معمم است $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{4}$

سوال، حاصل حدود زیر را بدست آورید

1) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{-x^2+9} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{-x-3} = \frac{1}{-2-3} = \frac{1}{-5}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-8x+4}{x^2-7x+12} = \frac{(x-2)(x-6)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x-6}{x-4} = \frac{-1}{1} = -1$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-5x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2}$

قضیه سرنوس $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

سوال عدهای بیگانه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\sin 2x}{2x} \right) = 2 \times 1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\tan \tau x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\delta}{\tau} \times \frac{\tau x}{\tan \tau x} \right) = \frac{\delta}{\tau} \times 1 = \frac{\delta}{\tau}$

1) $\lim (cf(x)) = c \lim f(x) = cL$: ~~در حد~~

جدا $\lim x^r = r \lim x^{r-1} = r$

2) $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = L_1 \pm L_2$

$\lim (cx^r + cx) = \lim cx^r + \lim cx = a + b = 1 + 2 = 3$

3) $\lim (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim (e^x - 1)(e^x + 1) = \lim (e^x - e) \cdot \lim (e^x + 1)$

4) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

✓) $\lim |f(x)| = |\lim f(x)|$
 $x \rightarrow x$

5) $\lim f(x)^n = (\lim f(x))^n$

6) $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

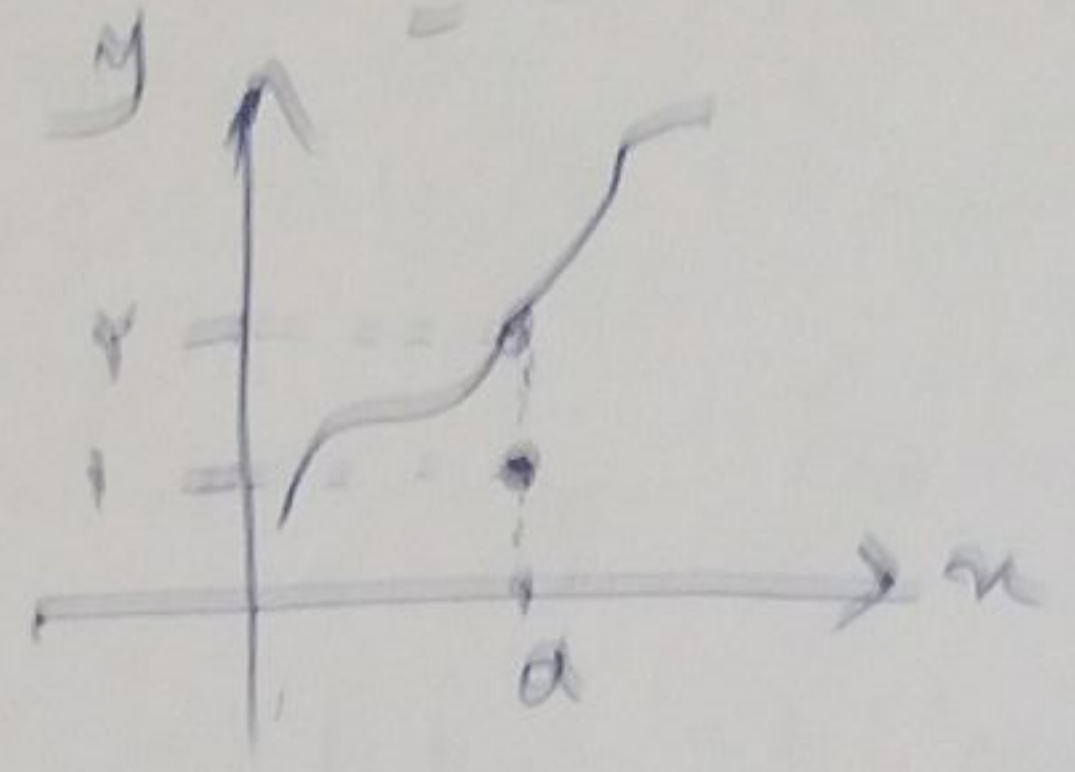
1) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2)(x^4) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2) \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^4)$ حدود زیر را ابتدا آورید

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x + 1}{\tan^2 x + e \cos x} = \frac{0 + 1 + 1}{0 + e} = \frac{2}{e}$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - 2 \sin x) = \cos^2 \frac{\pi}{2} - 2 \sin \frac{\pi}{2} =$
 $(\frac{1}{e})^2 - 2 \times \frac{\sqrt{e}}{e} = \frac{1}{e} - \sqrt{e}$

مفروضات مقادیر a و b و c از $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1 & x > 2 \\ \frac{ax + 2}{bx - 1} & x < 2 \end{cases}$ ع
 (در صورت برابر بودن) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 9$

نقطه حد و دامنه و مقدار تابع را در $x=a$ آورید

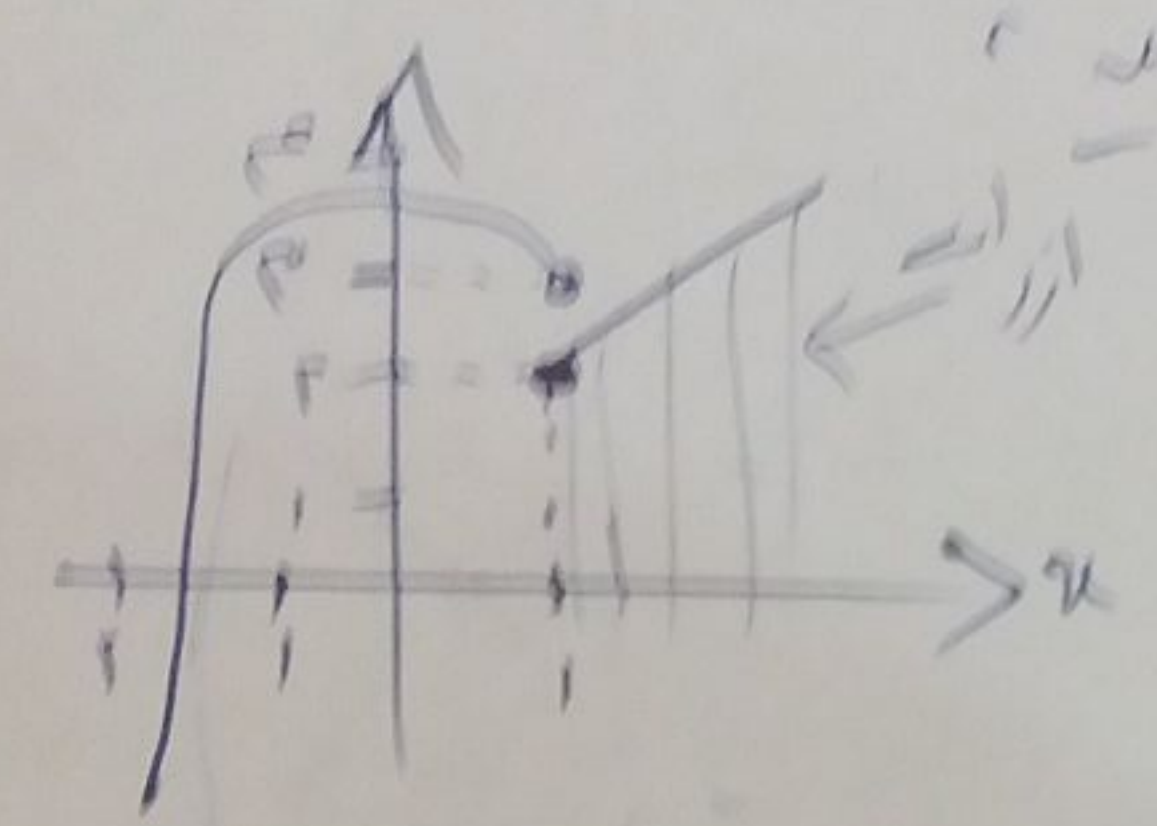


$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 1$$

$$f(a) = 1$$

با توجه به نمودار عددهای زیر را بیایید آورید



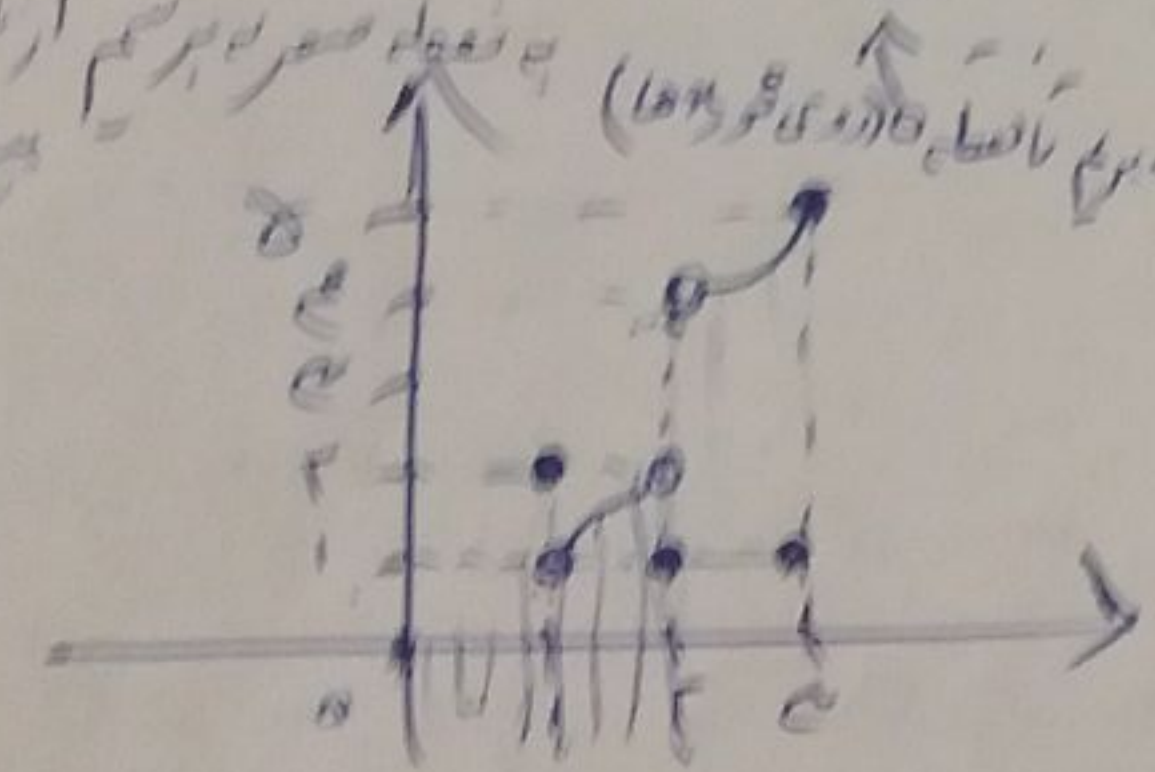
$$1) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

با توجه به نمودار تابع f قدر از عددهای زیر آئین کنید

باید
ارائه دارد



وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (چون نمودار تا سفر نشده پس حد وجود ندارد)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2$$

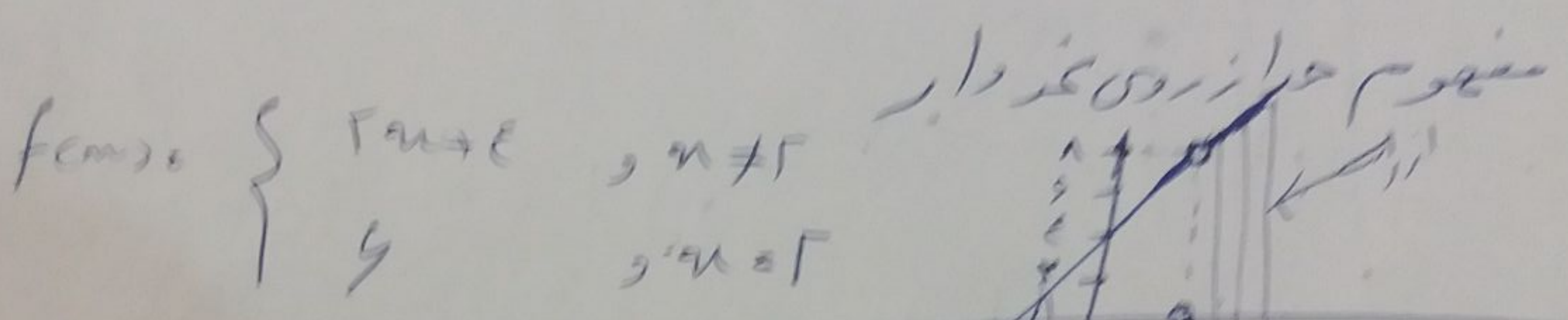
تا بر این می توانیم بدویم می توانیم $f(x)$ را به هر اندازه که بخواهیم نزدیک به ۲ نزدیک شویم
 مقادیر کمتر یا بیشتر از ۱ به قدری نزدیک شویم

$$\lim_{n \rightarrow 1} f(x) = 2$$

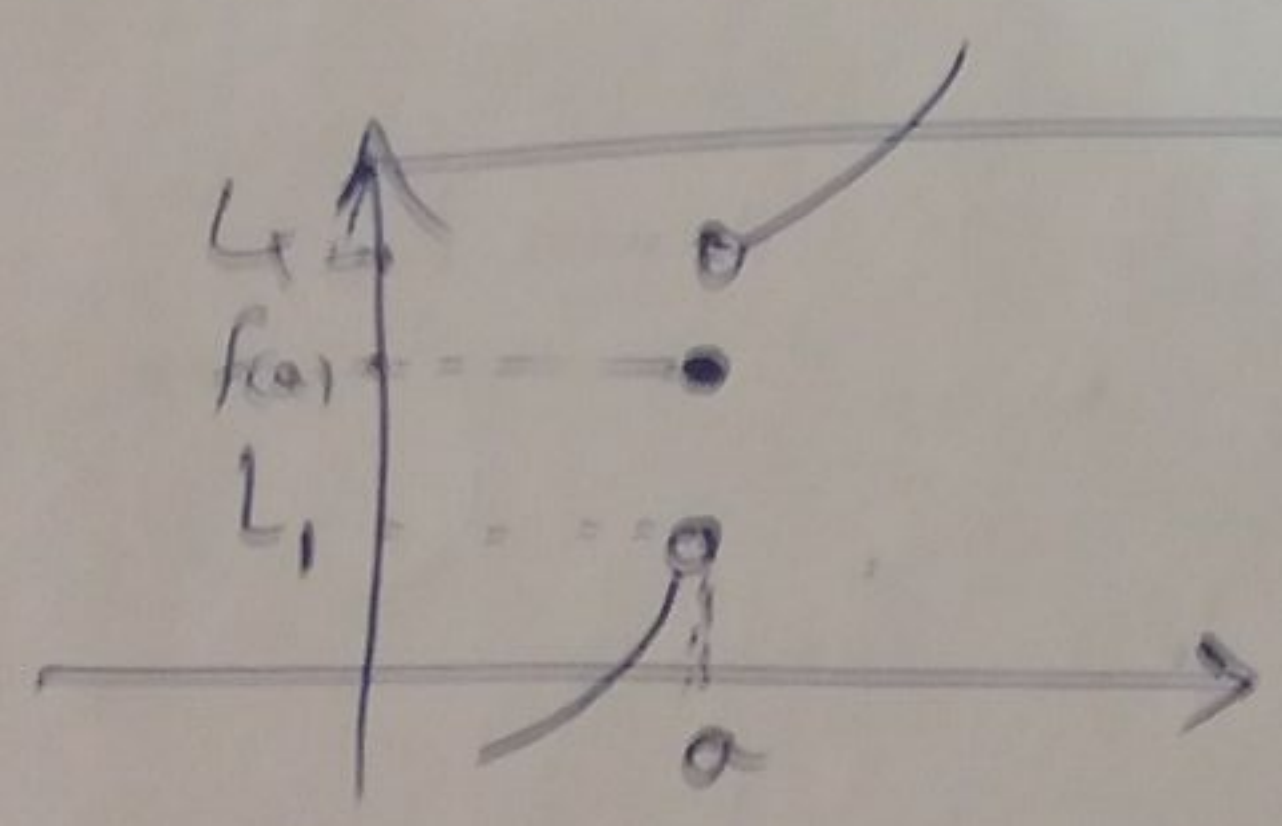
و می توانیم حد تابع $f(x) = x + 1$ و $f(x) = 2$ است

$$\lim_{n \rightarrow 1} f(x) = \frac{x^2 = 2}{x^2 + 1}$$

شکل



با نزدیک شدن به ۲ از دو طرف به عدد ۱ نزدیک می شویم یعنی $\lim_{n \rightarrow 2} f(x) = 1$

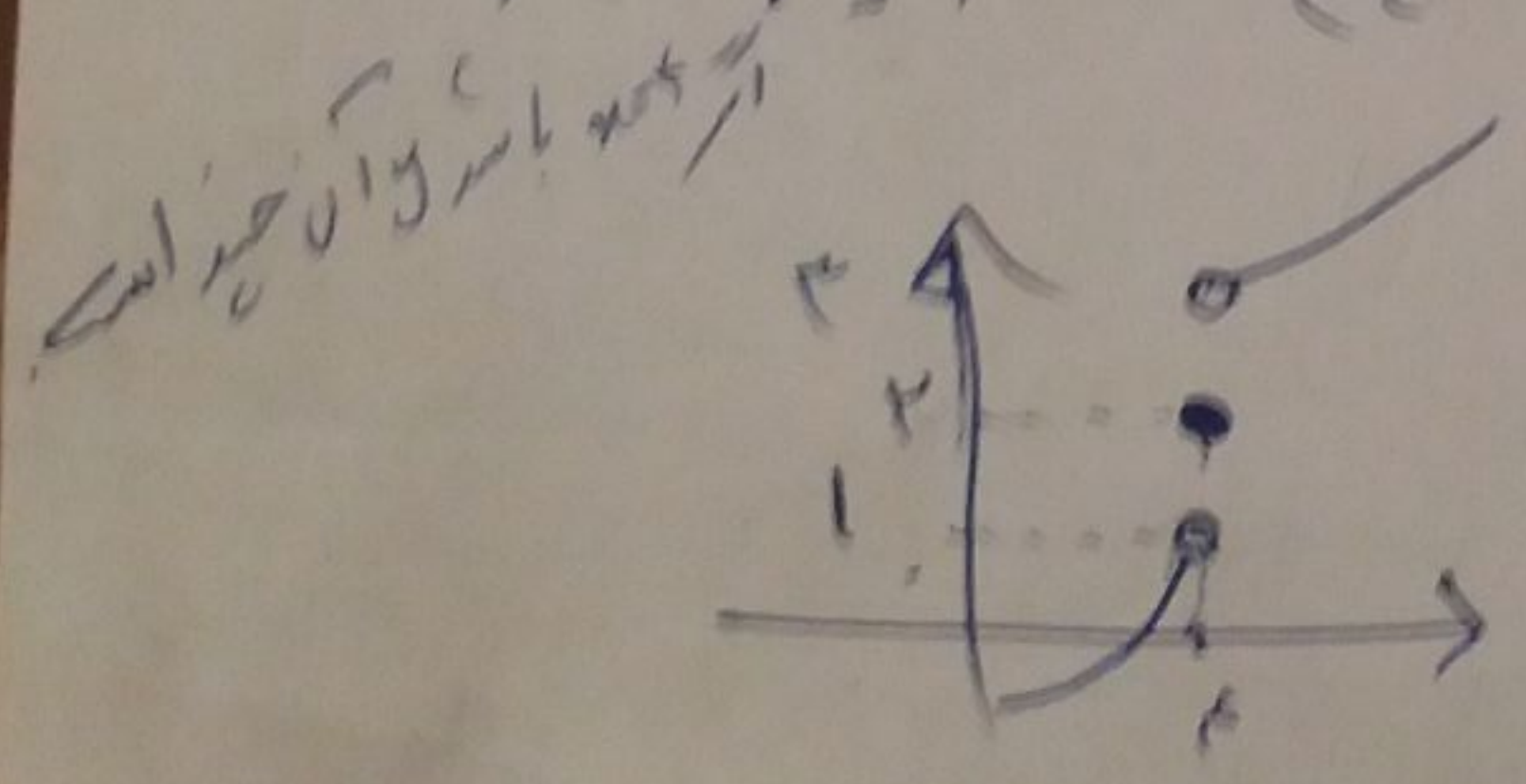


حد چپ در است

$$\lim_{n \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \quad / \quad \lim_{n \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

شکل (۳) با توجه به نمودار مقابل حاصل مقادیر زیر را بنویسید

الف) $\lim_{n \rightarrow 1} f(x) = ?$ ب) $\lim_{n \rightarrow 1} f(x) = 1$ ج) $f(x) = 2$



نکته: این تابع در نقطه ای دارای حد چپ و راست ندارد
 باشد در آن نقطه حد ندارد و برعکس حد دارد

تعیین کنید: $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 1) \}$ و $f \circ f$ و $f \circ f \circ f$

$f \circ f$

$x \in D_f \Rightarrow f(x) = 1 \rightarrow (2, 3), (3, 1) \Rightarrow (2, 1)$

$1 \in D_f \Rightarrow f(1) = 2 \rightarrow (1, 2), (2, 3) \Rightarrow (1, 3)$

$D_{f \circ f} = \{2, 1\}$

سوال: $f(x) = 2x + 3$ و $(f \circ g)(x) = 4x - 1$ معروض اند تابع

$f \circ g = f(g(x)) = 2g(x) + 3$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 4x - 1$

$\Rightarrow 2g(x) + 3 = 4x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{4x - 1 - 3}{2} \Rightarrow g(x) = 2x - 2$

سوال: $f(x) = 7x + 2$ مقدار $f(x)$ را بدست آورید

$2x - 4 = 8 \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

$f(8) = f(2 \times 4 - 4) = 7 \times 4 + 2 = 30$

فصل ۲ - حد و پیوستگی

مثال: بررسی: $f(x) = x + 1$ در اطراف عدد $x = 1$

x	0.9	0.99	0.999	1	1.000	1.001	1.0001
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	2	2.000	2.001	2.0001

در جدول گفتیم که $f(x)$ را با x مقایسه می‌کنیم و می‌بینیم که هر چه x به 1 نزدیک می‌شود، $f(x)$ به 2 نزدیک می‌شود.

(11)

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{به ترتیب} \\ \text{g of } f \end{array} \right\} \begin{array}{l} (3, 4) \in f, (4, 7) \in g \Rightarrow (3, 7) \in g \circ f \\ (5, 6) \in f, (6, 8) \in g \Rightarrow (5, 8) \in g \circ f \end{array} \\
 & g \circ f = \{(3, 7), (5, 8)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} \text{به ترتیب} \\ \text{D}_{f \circ g} \\ \text{و} \\ \text{f o g} \end{array} \right\} \begin{array}{l} g(1) = 2 \in D_f, g(4) = 7 \notin D_f, g(6) = 8 \notin D_f \\ D_{f \circ g} = \{1\}, f \circ g = \{(1, 4)\} \\ (1, 4), (6, 4) \end{array}
 \end{aligned}$$

توابع $f(x) = x - 2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ مفروض اند، دامنه f و g

و $f \circ g$ و $g \circ f$ را محاسبه و آنجا را تعیین کنید.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 2$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x - 2) = \sqrt{x - 2}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = [0, +\infty)$$

$$\begin{aligned}
 D_{g \circ f} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \in [0, +\infty)\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - 2 \geq 0\} = [2, +\infty) \\
 &\quad \underbrace{x \geq 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_{f \circ g} &= \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \in \mathbb{R}\} \\
 &= [0, +\infty)
 \end{aligned}$$

سوال (د) اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ اور $g = \{(1, 5), (2, 7), (4, 8)\}$

تو $f+g$ اور $f-g$ اور $f \cdot g$ اور $\frac{f}{g}$ راہ سے آوریں۔

$f+g = \{(1, 2+5), (2, 4+7)\} = \{(1, 7), (2, 11)\}$ ← $D_f \cap D_g = \{1, 2\}$

$f-g = \{(1, 2-5), (2, 4-7)\} = \{(1, -3), (2, -3)\}$

$f \cdot g = \{(1, 2 \times 5), (2, 4 \times 7)\} = \{(1, 10), (2, 28)\}$ اور $\frac{f}{g}$

$\frac{f}{g} = \{(1, \frac{2}{5}), (2, \frac{4}{7})\}$ در واقع امکانی ہے

\emptyset

Handwritten signature

اگر $f(x) = 2x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 1$ تو ان کا $\frac{f+g}{f}$ معلوم کریں۔

$$\frac{f+g}{f} = \frac{f(-2) + g(-2)}{f(-2)} = \frac{(-1) + 5}{\frac{9}{2}} = \frac{4}{\frac{9}{2}} = \frac{8}{9}$$

ترکیب توابع : $f \circ g(x) = f(g(x))$

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ اور $g = \{(1, 5), (2, 7), (4, 8)\}$ تو $f \circ g$ اور $g \circ f$ کی مثالیں

- $1 \in D_f \Rightarrow f(1) = 2 \notin D_g \Rightarrow 1 \notin D_{g \circ f}$
- $3 \in D_f, f(3) = 4 \in D_g \Rightarrow 3 \in D_{g \circ f} \Rightarrow D_{g \circ f} = \{3, 5\}$
- $5 \in D_f, f(5) = 6 \in D_g \Rightarrow 5 \in D_{g \circ f}$

9)

برای تابع بودن، باید حید ضابطه ای:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \in D_1 \\ g_2(x), & x \in D_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 1- \text{و } g_1(x) \text{ و } g_2(x) \text{ تابع باشند} \\ 2- D_1 \cap D_2 = \emptyset \end{matrix}$$

$$3- \text{اگر } D_1 \cap D_2 \neq \emptyset \text{ از آن هر کس از فاصله مورد نظر } g_1(x) = g_2(x)$$

$$D_1 = [1, +\infty) \text{ و } D_2 = (-\infty, 1] \quad f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 2, & x \in D_1 \\ \sqrt{x+1} - 2, & x \in D_2 \end{cases}$$

$$D_1 \cap D_2 = 1$$

$$f(1) = 0 \text{ و } f(1) = 0 \Rightarrow \text{تابع } f$$

$$(x < 0) \cap (x > -1) = (-1, 0) \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{-x+2} & x < 0 \\ -x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$g(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$g(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$$

و تابع نیست

$$1) (kf)(x) = k f(x)$$

$$2) (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$3) (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$4) (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

اعمال جبری روی توابع:

$$D_{kf} = D_f$$

$$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ m^2-7, & x=1 \end{cases}$ و $f(x) = x+1$

مساوی دارند.

پس $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$

پس برای هر $x \neq 1$ روابط $f(x) = g(x)$ برقرار است.

$f(1) = 1+1 = 2$

$g(1) = m^2-7$

$\Rightarrow m^2-7 = 2 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

بررسی تابع از طریق ضابطه

برای هر x_1, x_2 : $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

سوال) آیا رابطه $2x + 3y = 4$ تابع است.

$3y = 4 - 2x \Rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x$

$x_1 = x_2 \Rightarrow$ ~~$\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_2$~~

اگر توانیم y را بیازیم پس تابع است.

$-\frac{2}{3}x_1 = -\frac{2}{3}x_2 \Rightarrow -\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}$

$\Rightarrow y_1 = y_2$

سوال) آیا رابطه $y^2 = 2x+1$ تابع است.

دو مقدار برای y داریم پس این تابع $y = \pm \sqrt{2x+1}$ است.

⑦

توابع چندضابطه‌ای :

در اوقات قانون یا ضابطه تابع از چند بخش متشکل شده است .

مثال (۱) در تابع چندضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \geq 1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ 2x-1 & x \leq -1 \end{cases}$ مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$f(-4)$ / $f(-\frac{1}{2})$ / $f(1)$ / $f(4)$

در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & x \geq 0 \\ x+b & x < 0 \end{cases}$ اگر $f(2) = 2$ و $f(-2) = 0$ باشد

اگر $a+b = 0$ باشد، آید و در

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a(2)}{2-1} = 2 \\ -2+b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

α α

دامنه توابع چندضابطه‌ای :

دامنه توابع چندضابطه‌ای برابر با اجتماع دامنه‌ی ضابطه‌ها است .

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \end{cases}$$

مثال، دامنه تابع $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 2 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$

$D_f = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$

مثلاً اگر تابع $f = \{(2, 3), (3, 2), (5, 5)\}$ یک تابع گانه باشد و y

تابع دوسه آورید
 $(2, 3) \Rightarrow x=2$

$(2, x+y) \rightarrow x+y=2 \rightarrow 2+y=2 \Rightarrow y=-1$

یک و دو تابع:

- ۱- دامنه‌ها برابر باشند.
- ۲- به ازای هر عضو از دامنه هر دو تابع مساوی باشند.

شرط این که دو تابع مساوی باشند این است که:

$f(x) = g(x)$

مثلاً آیا دو تابع $f(x) = x-1$ و $g(x) = \frac{x(x-1)}{x}$ مساوی اند؟

$D_f = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g$ (تابع اول مساوی نیست)

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

$g(x) = 4x^2 - 2x$

$f(x) = 2x(2x-1)$ (مثلاً)

$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}$

دو تابع برابرند $\Rightarrow f(x) = g(x)$

$g(x) = \pm 1$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$

$\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \pm 1$
 $\rightarrow \frac{x}{-x}, \frac{x}{x}$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$D_g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) \neq g(x)$

تابع‌های

اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو در دامنه دقیقاً به همان عضو در برد نظر شود آن تابع را تابع همانی گوئیم که دامنه‌های جبری $f(x) = x$ می‌باشد.

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	3	4

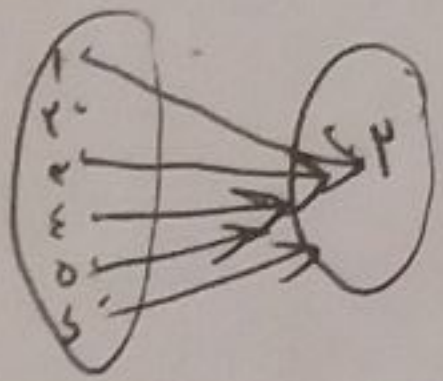
تذکره ۱: از دیدگاه زوج‌های مرتب: تابع‌های $f(x) = x$ و زوج مرتب‌ها مؤلفه‌های اول و دوم برابر داشته‌اند.

تذکره ۲: از دیدگاه نمودار مختصات: نمودار تابع‌های $f(x) = x$ نیز ربع اول و سوم است.

تابع ثابت: تابعی که برد آن تنها شامل یک عضو باشد.

$f(x) = c$

- مؤلفه‌های دوم تمام زوج‌های مرتب معطوبند است.



- تمام اعضاها فقط به یک عضو در مجموعه دوم وارد می‌شوند.

- نمودار تابع ثابت خط موازی محور x ها است.

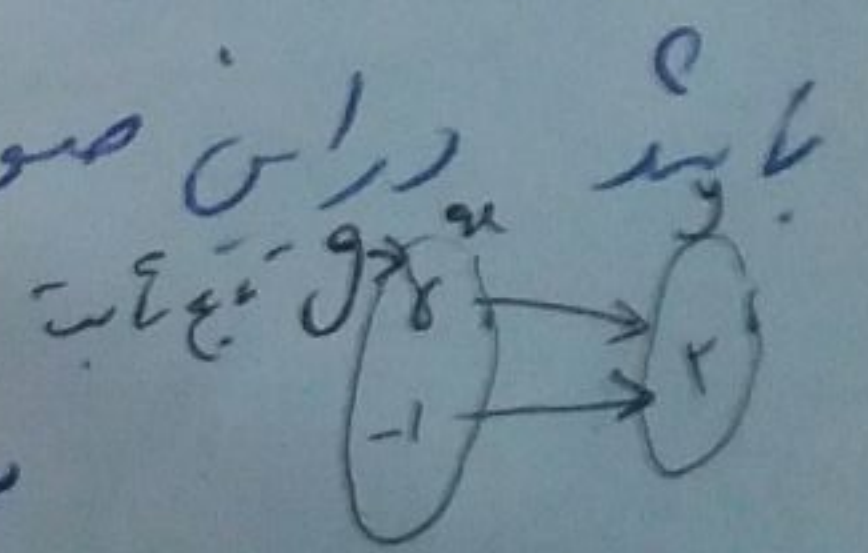
مثلاً اگر $f(x) = 4$ باشد مقادیر $f(2)$ و $f(\sqrt{11})$ و $f(-\frac{1}{2})$

را محاسبه کنید. $f(2) = 4$ و $f(-\frac{1}{2}) = 4$ و $f(\sqrt{11}) = 4$

* مثال فرض کنید f تابع‌های g و f تابع ثابت و $f(2) = g(5)$

باید در این صورت $g(-1) + g(-2)$ را محاسبه کنید

$f(-2) = -2$ چون f همانی



$g(-1) = 2$ چون g ثابت است $\Rightarrow g(5) = 2$ چون f همانی است $\Rightarrow 2 = f(2) = g(5)$

$f(-2) + g(-1) = -2 + 2 = 0$

صافحه تابع ، قانون آنکه هر عضو از دامنه را فقط و فقط به یک عضو از برد نظیر می کند .

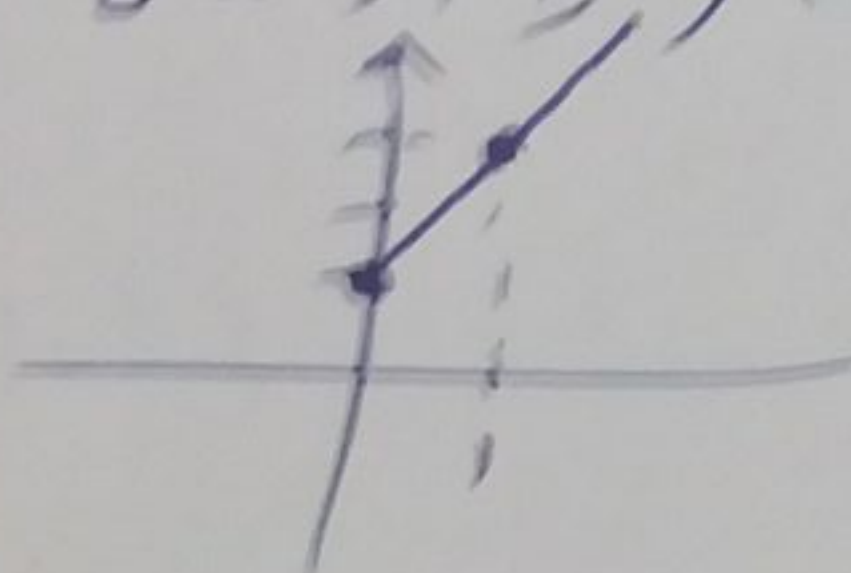
مثال (تابع زیر به فرم جدول ارائه شده است ، صافحه تابع و دامنه در آن را مشخص کنید)

x	2	3	4	5
f	6	9	12	18

صافحه : $f(x) = 3x$

سوال (خود را تابع $f(x) = 2x + 1$ را دامنه صحیح اعداد حقیقی نامشروع کرده

x	0	1
$f(x)$	1	3



و برد آن را مشخص کنید

$D = [0, +\infty)$ و $R = [1, +\infty)$

لا یغیر انما یدر R است

سوال (صافحه مرتب از تابع زیر را به R که تصویرش از R است بنویسید

الف) تابع f به هر عدد صحیح x آن عدد به اضافه 3 را نظیر می کند -

$f: R \rightarrow R : f(x) = x + 3$

ب) مجموعه دو عدد 16 حاصل می شود دو عدد از این دو عدد را به صورت تابعی

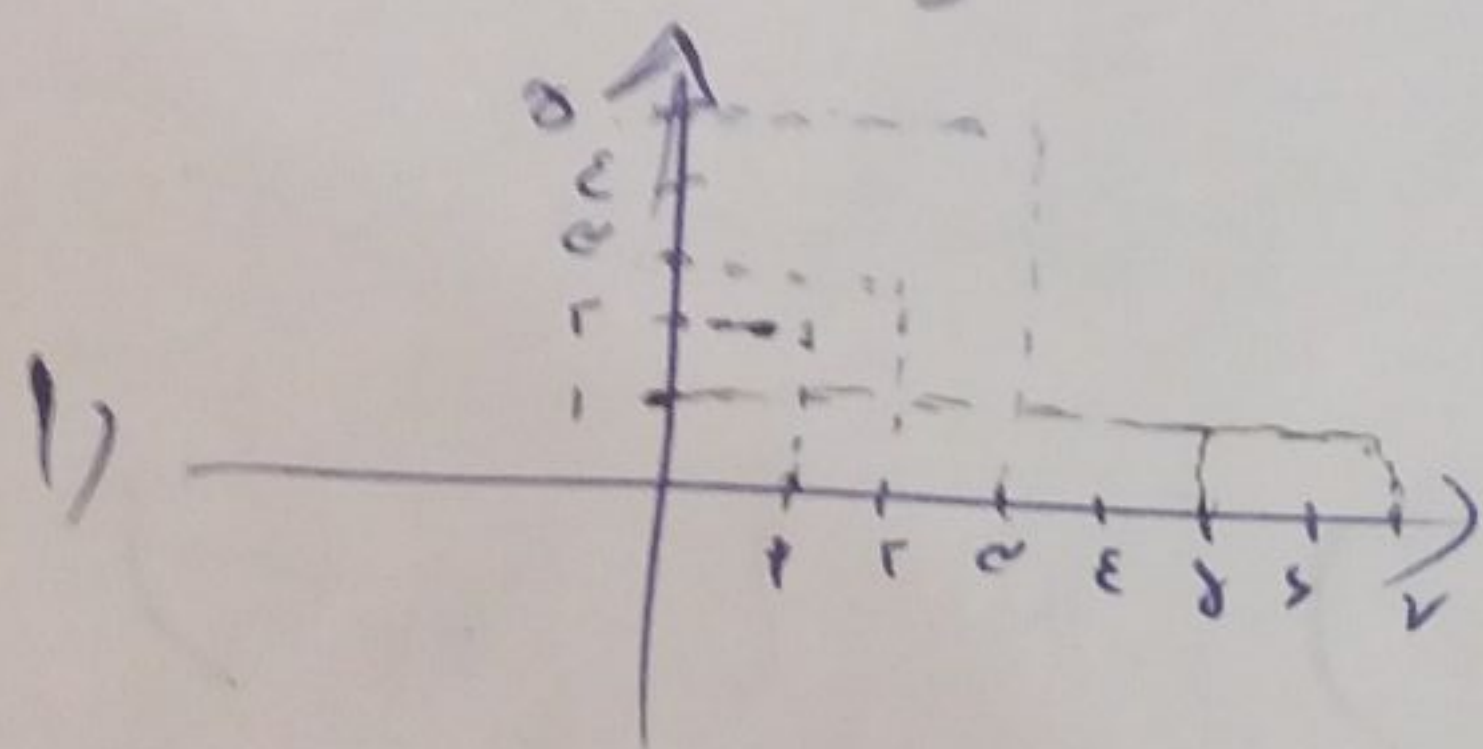
بنویسید $x + y = 16 \rightarrow y = 16 - x$

$P = x \cdot y \rightarrow P = x \cdot (16 - x) \Rightarrow P(x) = 16x - x^2$

دانه و برد توابع

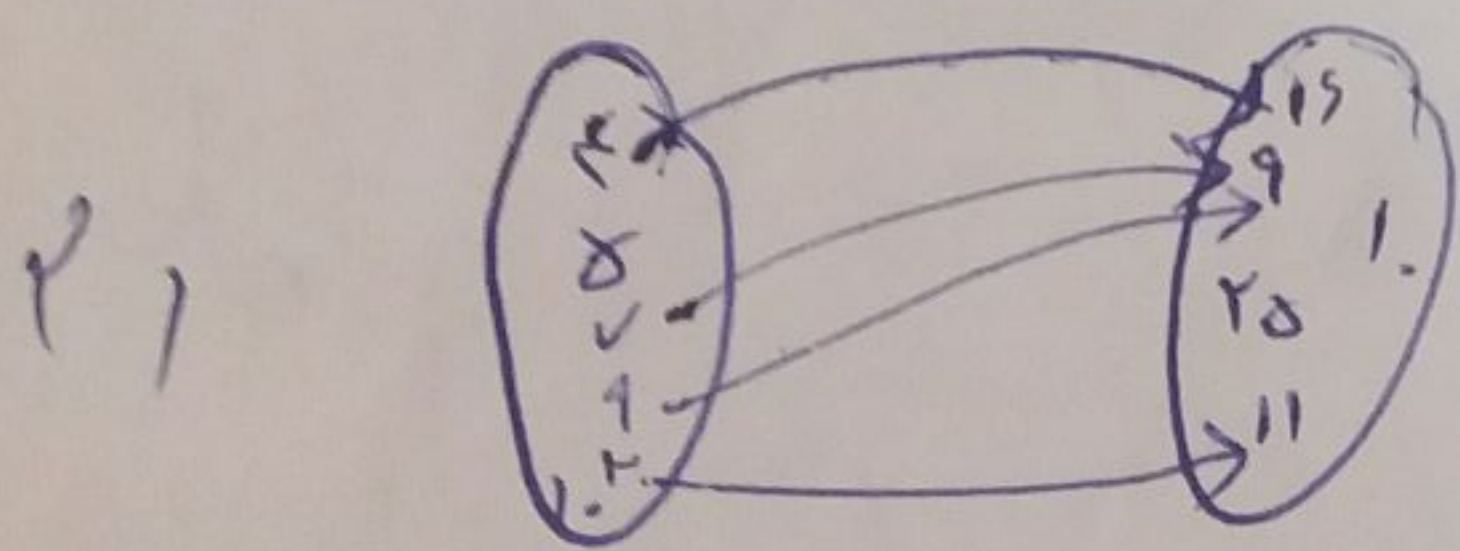
- ۱- از دیدگاه زوج مرتب: مجموعه‌ی همای مولفه‌های اول زوج‌های مرتب تبدیل دانه و برد توابع را دانه و مجموعه‌ی همای مولفه‌های دوم زوج مرتب‌ها را برد تابع گویند.
- ۲- ... و ... : اعضای مجموعه اول که از آن‌ها بیگان خارج می‌شود را دانه و اعضای از مجموعه دوم که بیگان به آن‌ها وارد شده برد تابع را بیگانه می‌گویند.
- ۳- از دیدگاه نمودار مختصاتی: تصاویر نقاط روی محور x ها دانه و تابع می‌باشد و تصویر نقاط روی محور y ها برد تابع می‌باشد.

سؤال ۱) دانه و برد مرتب از توابع داده شده را تعیین کنید.



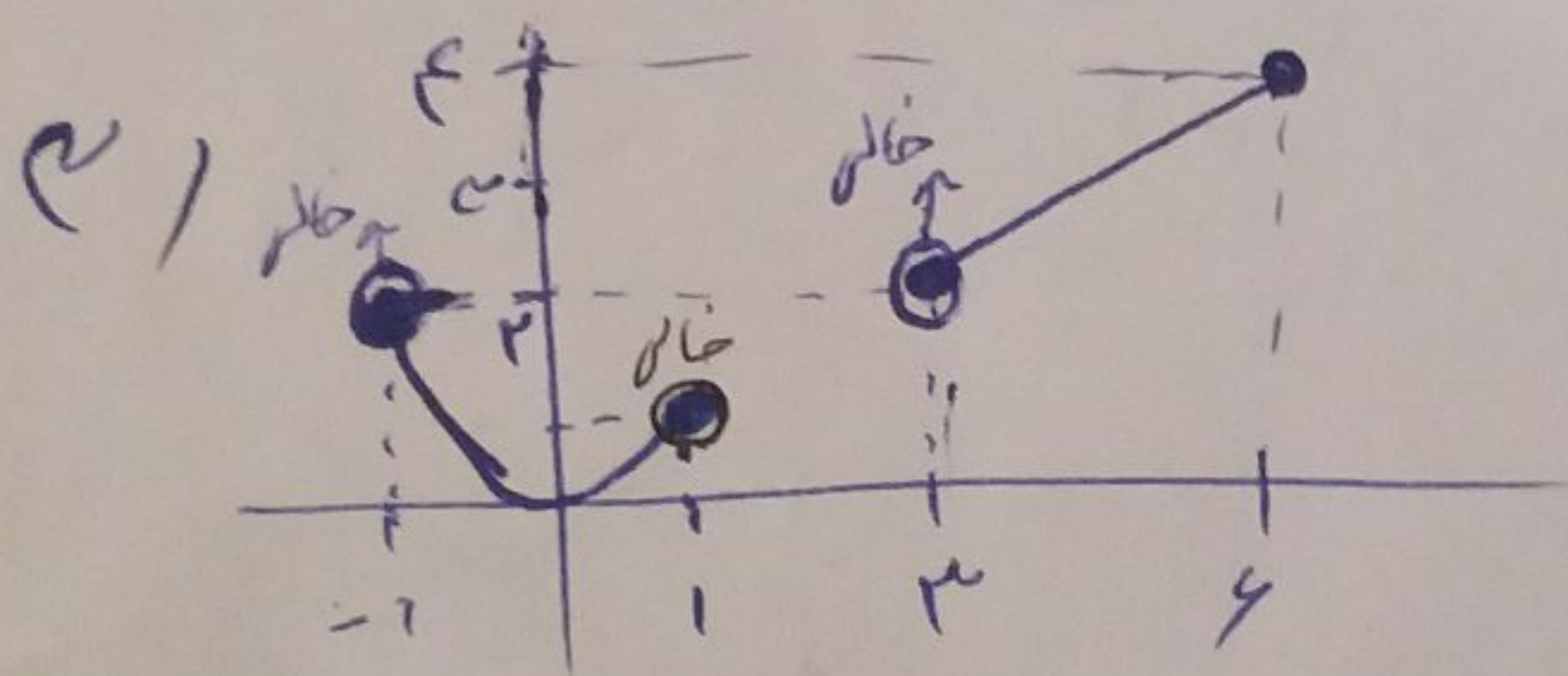
$$\text{دانه} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{برد} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$



$$\text{دانه} = \{2, 4, 5, 7, 9\}$$

$$\text{برد} = \{11, 9, 16\}$$



$$\text{دانه} = \{(-1, 1), (2, 4)\}$$

$$\text{برد} = \{2, 4\}$$

مثال ۱) اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8\}$ باشد چند تابع از مجموعه A به B وجود دارد؟

چند تابع از A به B وجود دارد $B \leftarrow A = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$
 چند نفر عضو از مجموعه A می تواند با ۴ عضو B نظریه شود

$$A \leftarrow B = 4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

~~قدرت از مولفه ها اول برابر باشند باید مولفه های دوم را برابر کنیم به علاوه تابع بودن آنها نیز باید برابر باشند~~

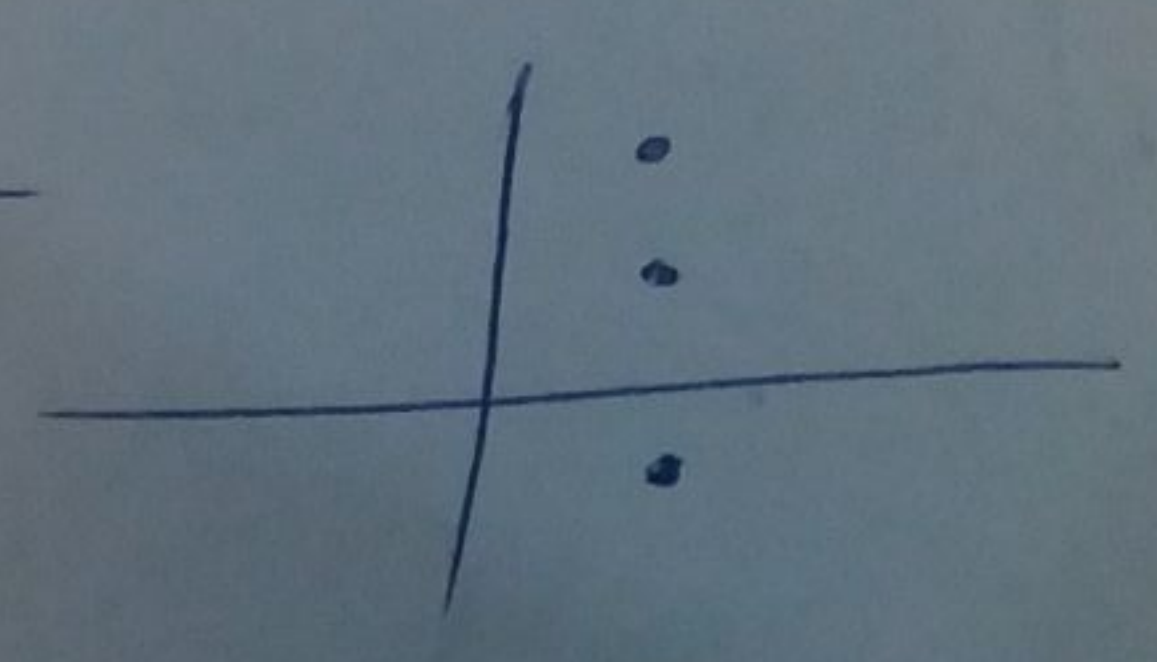
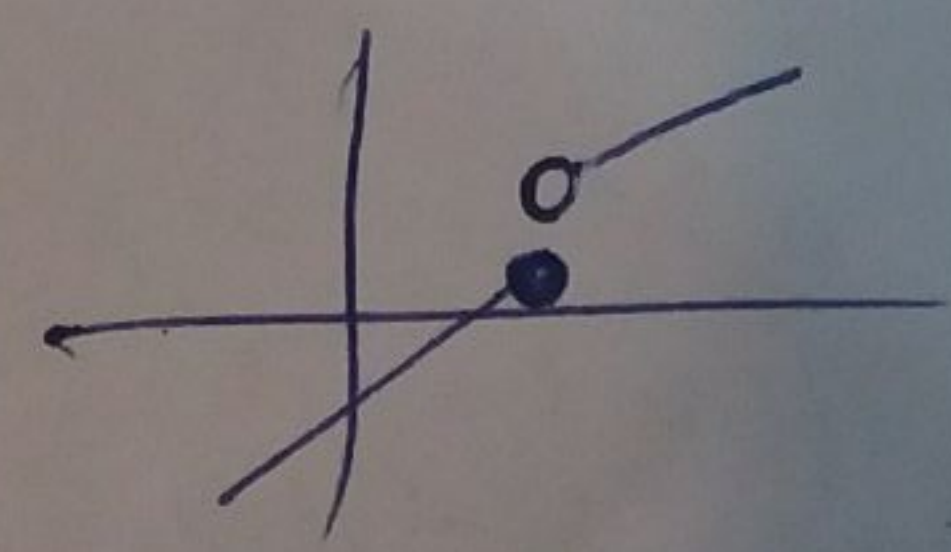
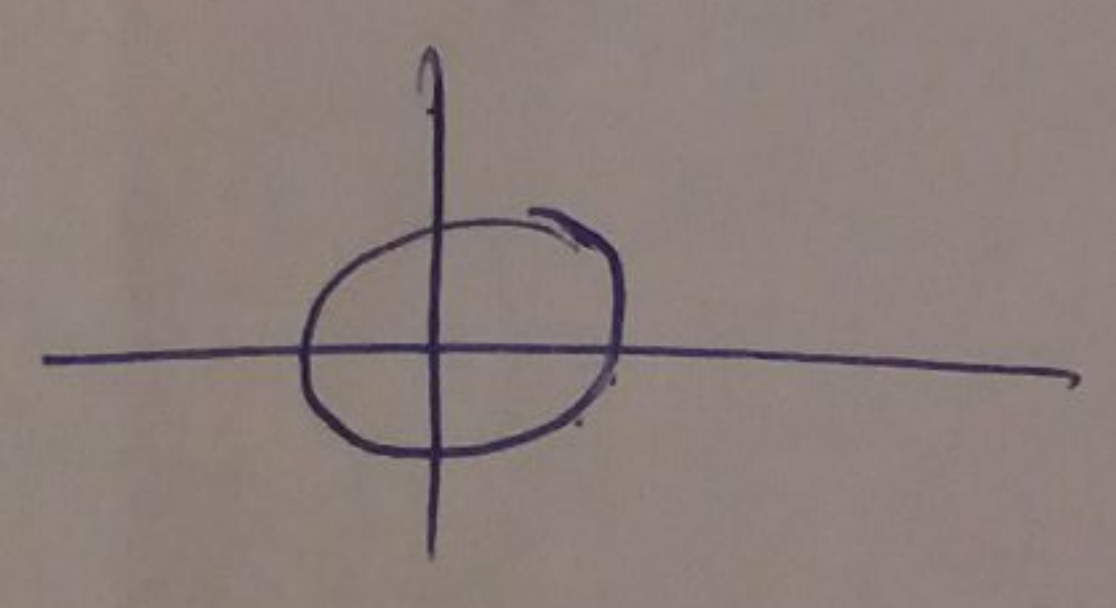
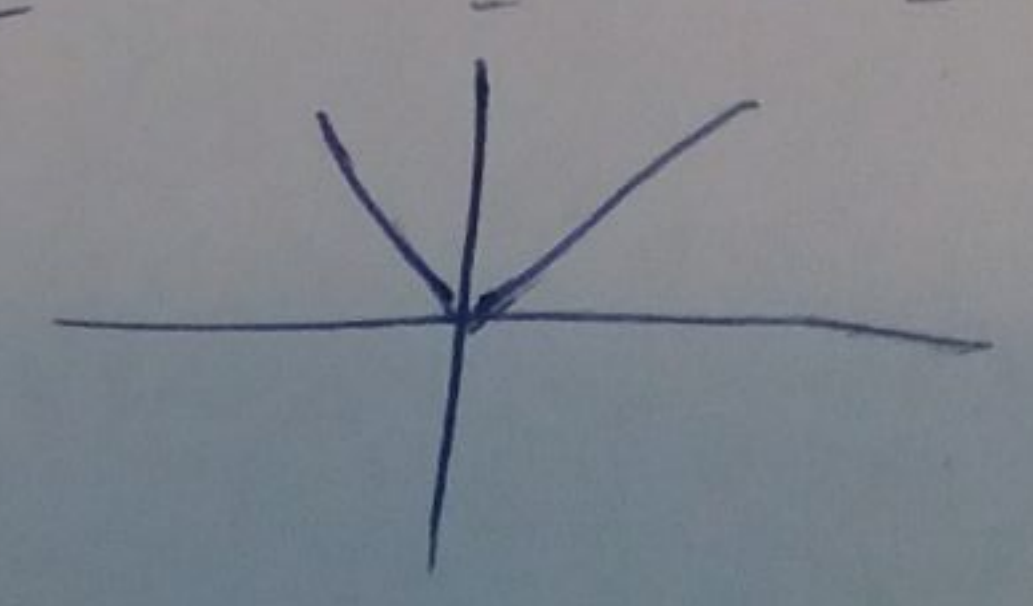
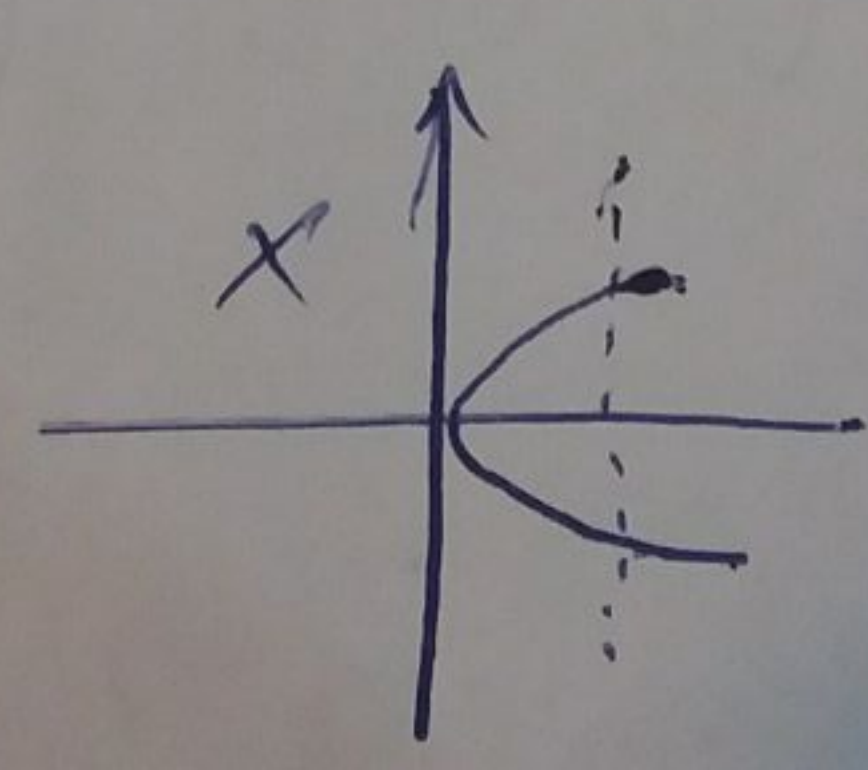
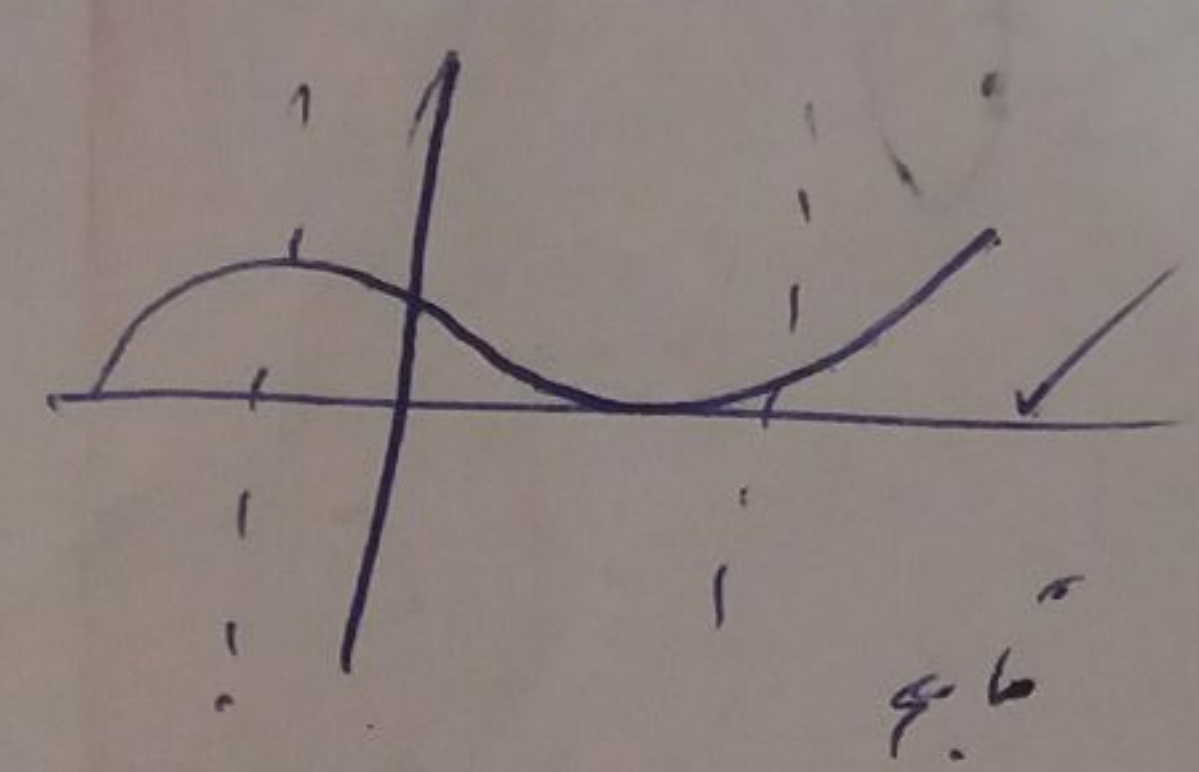
سوال) مقدار a و b را طوری بیابید که رابطه زیر تابع باشد

$$f = \{(0,0), (0, a-b), (1, 2), (1, a+b)\}$$

$$\begin{aligned} a+b &= 2 \Rightarrow a=b=1 \\ a-b &= 0 \end{aligned}$$

بررسی تابع از دیدگاه نمودار مختصات:

شرط تابع بودن رابطه آن است که هر خط عمودی محور x ها هم نیم نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکند

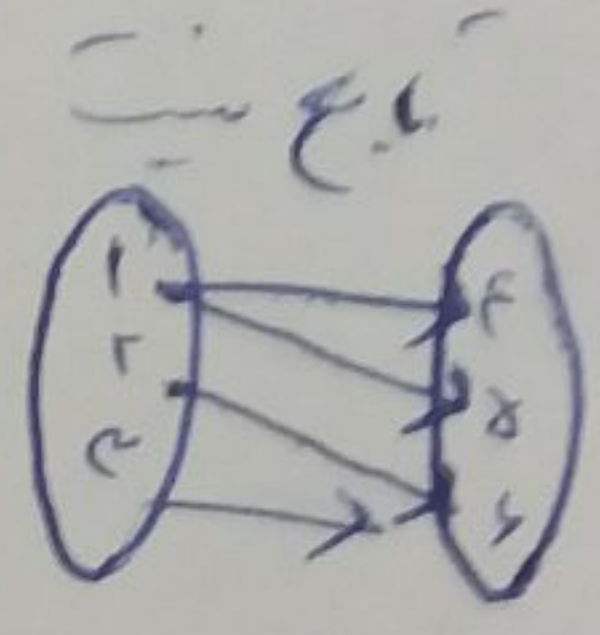
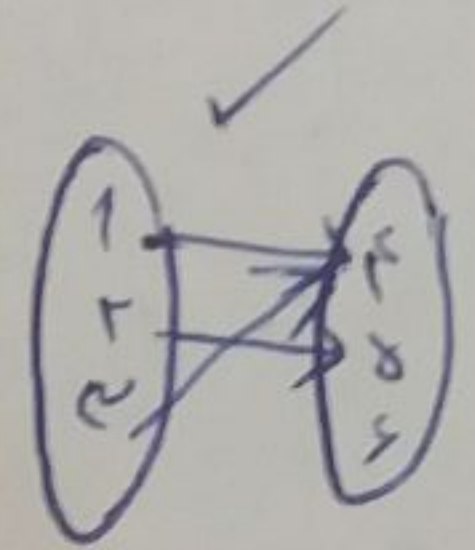
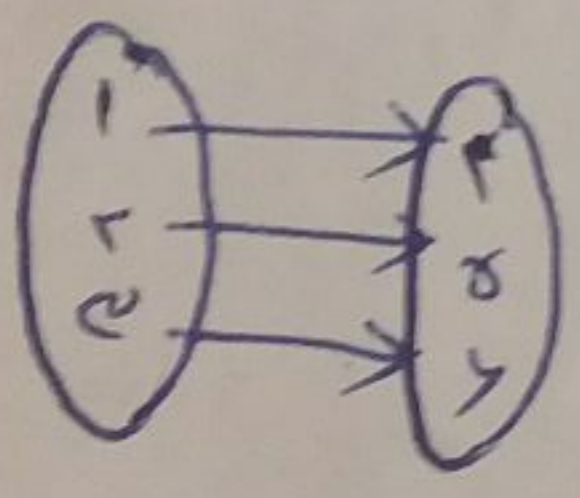


تابع ، حدود پیوستگی ، مشتق ، انتگرال

تعریف: یک تابع رابطه‌ای بین دو مجموعه است که در آن به هر عضو از مجموعه اول می‌توان بیش از یک عضو از مجموعه دوم نظر کرد.

بررسی یک تابع از دیدگاه نمودار دین

یک رابطه که با نمودار دین نمایش داده شده است، تنها در صورتی تابع است که از هر عضو مجموعه اول هیچ‌گاه بیش از یک بیگانه خارج نشود.



نکته

بررسی تابع از دیدگاه زوج مرتب

اگر یک رابطه در صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش داده شده باشد در صورتی که

مجموعه تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن دارای مولفه‌های اول

یکسان نباشد. (توجه: مولفه اول برابر باشد باید مولفه دوم نیز برابر باشد اگر دوم نیز برابر باشد پس تابع است.)

مثال: $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$ و $f = \{ (1, 2), (2, 3), (2, 4) \}$

$f = \{ (1, 1) \}$ و $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$